10. Základy kombinatoriky

10.1. Úvod do problematiky

Kombinatorika je zajímavá část matematiky, která se hlásí ke slovu již v 17. a 18. století. Zabývá se vlastnostmi konečných množin, pracuje s prvky, které různými způsoby seskupuje a velmi často určuje kolik vznikne skupin dané vlastnosti. Z tohoto důvodu pracuje pouze s prvky množiny kladných celých čísel.

Jedním z předpokladů proniknutí do této problematiky je schopnost vytvářet dvojice, trojice, čtveřice, …. k-tice prvků z dané množiny.
K-ticí na množině přirozených čísel rozumíme množinu čísel { 1, 2, 3, 4, 5, …., k-2, k-1, k }, která má k prvků.

Příklad 1 : V rovině je dáno n přímek, každé dvě jsou různoběžné a každé tři neprochází týmž bodem. Určete počet průsečíků p.
Počet úhlopříček můžeme vypočítat také pomocí tabulky:

A	
B	A+B

Příklad 2 : : V rovině je dáno n přímek, každé dvě jsou různoběžné a každé tři neprochází týmž bodem. Určete počet o, na které přímky rozdělí rovinu. Počet oblastí můžeme vypočítat také pomocí tabulky :

	B
A	A+B

Příklad 3 : Máme množinu bodů { A, B, C, D, E }.
a) napiš, které úsečky vzniknou spojením dvou bodů (tvoříš dvojice)
b) napiš, které trojúhelníky je možné vytvořit pomocí těchto bodů (tvoříš trojice)
c) jaké budeš-li moci vytvořit největší k-tice z daných bodů ?

V tomto případě jsme vytvářeli dvojice, trojice, na které jsme nekladli žádné podmínky. Někoho z vás napsal například *AB*, ale jiný se více zamýšlel a napsal *AB* i *BA*. První vycházel ze znalostí geometrie, ale druhý, který více upřednostnil přístup kombinatoriky, si již uvědomil, že někdy mohou nastat situace, že bude záležet na pořadí prvků.
V kombinatorice se velmi setkáváme s určitými požadavky na danou k-tici (záleží – nezáleží na pořadí).

Příklad 4 : Je dán čtverec ABCD o straně a = 5 cm.
a) pojmenuj všechny možné úsečky (vytvoř dvojice bez dalších požadavků)
b) pojmenuj všechny úsečky, které jsou kolmé na úsečku AB (vytvoř dvojice dané vlastnosti).

Příklad 5 : Na CD jsou vypáleny tyto slovníky : německý, francouzský, anglický, ruský a italský. Napiš jaké překlady lze dělat pomocí tohoto CD?

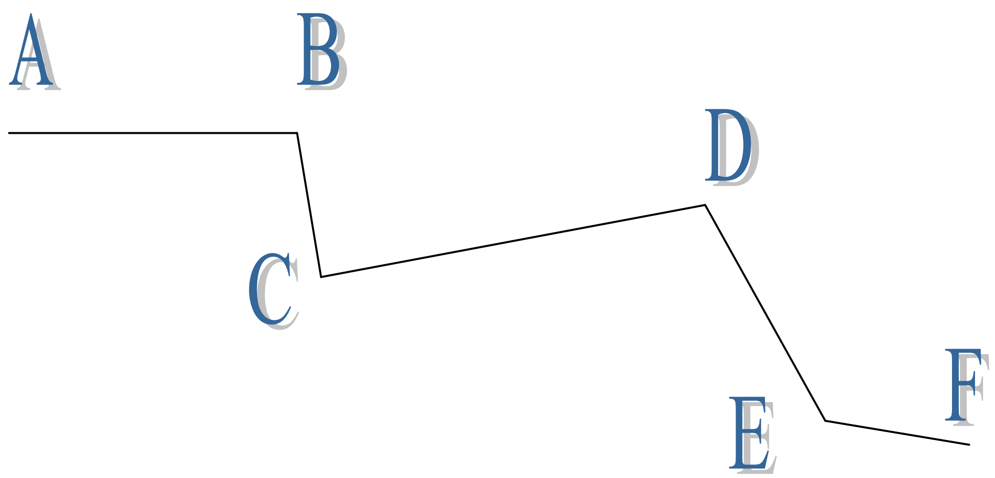
Příklad 6 : Je dána množina všech jednociferných přirozených čísel.

a) vytvoř množinu všech dvojciferných čísel, pro které platí $21 < x < 37$
b) vytvoř množinu všech trojciferných čísel, které jsou dělitelné devíti, pro které platí $219 < x < 247$.

Příklad 7 : Pomocí tabulky a) udejte vzdálenosti Bratislava – Košice
Košice – Liberec
Praha – Bratislava
b) určete délku trasy Praha – Brno – Bratislava
Praha – Ostrava – Košice
Praha – Brno - Košice

BRATISLAVA					
142	BRNO				
403	473	KOŠICE			
381	239	660	LIBEREC		
324	230	661	107	PRAHA	
318	165	371	340	347	OSTRAVA

Příklad 8 : Na obrázku je úsek železniční trati . Udané údaje jsou v kilometrech : /AB/ = 20,3 km, /BC/= 10,4 km, /CD/ = 12,3 km, /DE/ = 22,7 km, /EF/ = 25,6 km. Zpracujte přehlednou tabulku. Za vzor si vezměte tabulku v předcházejícím příkladě.



Příklad 9 : Je dán 5-ti úhelník ABCDE. Kolik existuje úseček, které spojují vrcholy pětiúhelníka ?
a) výčtem
b) výpočtem
c) určete obecně vzorec pro n-úhelník.

Příklad 10 : Je dán 5-ti úhelník ABCDE. Kolik existuje úhlopříček, které spojují vrcholy pětiúhelníka ?
a) výčtem
b) výpočtem
c) určete obecně vzorec pro n-úhelník.

Příklad 11 : Na kružnici zvolte 3 černé body a 9 modrých bodů.
a) Kolik úseček spojuje různobarevné body ?
b) Kolik úseček spojuje stejnobarevné body ?

Příklad 12 : Na kružnici zvolte 9 různých bodů. Kolik z nich musí být modrých a kolik z nich musí být černých, aby počet všech úseček spojující různobarevné body byl co největší?

Příklad 13 : Čtyři kamarádi (Adam, Bohouš, Cyril, Dana)se navzájem loučí podáním ruky. Kolik bude podání rukou : a) výpočtem
b) výčtem c) vytvořte vzorec pro <u>n</u> kamarádů

Příklad 14 : Deset států si vyměňují navzájem své velvyslance.
a) Kolik velvyslanců potřebuje každý stát?
b) Kolik budeme potřebovat všech velvyslanců ?
c) Vytvořte vzorec pro výpočet počtu všech velvyslanců pro <u>n</u> státu.

Příklad 15 : V tenisové soutěži hrají dvě čtyřčlenná družstva. každý hráč jednoho družstva hraje s každým hráčem druhého družstva. Kolik sehraje každý hráč zápasů ? Kolik zápasů se v turnaji sehraje?

10.2. Výpočet faktoriálu

$1! = 1$ $\quad 2! = 2 . 1 = 2$ $\quad 3! = 3 . 2 . 1 = 6$
$4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$ $\quad 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ $\quad 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$
$k! = k . (k-1) . (k-2) . (k-3) . \ldots\ldots\ldots . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$
$(k+4)! = (k+4) . (k+3) . (k+2)!$ nebo
$(k+4)! = (k+4) . (k+3) . (k+2) . (k+1) . k . (k-1)!$ a podobně

Pamatuj si: **0 ! = 1**

Příklad 16 : Vypočti:

a) 7 !

b) 10 !

c) 15 !

d) (– 4) !

Příklad 17 : Vyjádři:

a) (k + 4) !

b) (k – 2) !

c) (a + 1) !

d) e !

Příklad 18 : Vyjádři :

a) k ! pomocí (k – 3)!

b) (k + 2) ! pomocí k!

c) (k + 3) ! pomocí (k – 3)!

10.3. Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ Výraz čteme *en nad ká.*

n - počet prvků základní množiny

k – počet prvků kombinace

$$K (k ; n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = \frac{5.4}{2} = \mathbf{10}$$

Doporučujeme počítat zkráceně.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} = \frac{5.4}{2} = \mathbf{10}$$

Při těchto výpočtech používáme krácení zlomků. Krátit zlomek znamená dělit čitatele a jmenovatele stejným číslem různým od nuly.

Příklad 19 : Vypočítej : a) $\binom{7}{3} =$ b) $\binom{4}{2} =$ c) $\binom{5}{4} =$

d) K (5; 10) = e) K (8; 10) = f) K (6; 9) = g) K (7; 9) =

h) K (8; 11) = i) K (2; 6)

10.4. Typy příkladů v kombinatorice

10.4.1. Charakteristika základních typů

Při vytváření skupin v kombinatorice se setkáváme s pojmem **základní množina** (množina prvků, které máme k dispozici pro výpočet – počet prvků budeme označovat zpravidla **n**) a **skupina** (množina prvků, které vytváříme na základě požadovaného počtu prvků a dané vlastnosti – počet prvků budeme zpravidla označovat **k**). Této skupině říkáme dvojice, trojice, čtveřice, …. k-tice. Tyto vytvořené skupiny pak tvoří **výslednou množinu** (množina skupin dané vlastnosti).

Při vytváření skupin se setkáváme s těmito požadavky :
- <u>prvky ve skupinách se nesmějí opakovat</u>

1) máme vytvořit skupiny, které mají stejný počet prvků jako základní množina (n = k)
Hovoříme o **PERMUTACI.**

2) máme vytvořit skupiny, které mají menší počet prvků než má základní množina (k < n)
a) jestliže nezáleží na pořadí prvků ve skupině, tak hovoříme o **KOMBINACI**,
b) jestliže záleží na pořadí prvků ve skupině, tak hovoříme o **VARIACI**.

<u>- prvky se skupinách se smějí opakovat</u>
Hovoříme **o permutaci s opakováním, kombinaci s opakováním, variaci s opakováním**.
S touto skupinou příkladů se setkáme až ve vyšších ročnících.

Příklad 20 : u následujících příkladů urči zda se jedná o permutace, kombinace nebo variace

a) Tomáš, Honza, Věra si podávají ruku. Kolik bude podání ruky?
b) Osmiúhelník má vrcholy K, L, M, N, O, P, Q, R. Kolik existuje trojúhelníků, které mají vrchol ve vrcholech osmiúhelníka.
c) Karel, Pavel, Dušan, Eva a Karla běží závod na 100 m. Kolika způsoby je možné sestavit trojici vítězů, které budou stát na stupni vítězů?
d) S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 5 poslanců. Určete počet všech možných pořadí vystoupení jednotlivých poslanců.
e) Kolika způsoby mohou Petr, Karel, Zdeněk, František a Dušan ráno na táboře nastoupit do řady?
f) Kolika způsoby je možné sestavit vlajku, která má být složena ze tří různobarevných pruhů, máme-li k dispozici barvu zelenou, černou, žlutou, fialovou, bílou ?
g) Kolika způsoby je možné sestavit vlajku, která má být složena ze tří různobarevných pruhů, máme-li k dispozici barvu zelenou, černou, žlutou ?

10.4.2. Kombinace bez opakování

Počet kombinací : $K(k; n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

Příklad 21 : Vypočtěte počet kombinací :

a) šesté třídy z devíti
b) sedmé třídy z devíti
c) páté třídy z deseti
d) osmé třídy z jedenácti
e) druhé třídy z deseti
f) třetí třídy z jedenácti

Příklad : Tomáš, Honza, Věra a Kamila si podávají ruku. Kolik bude podání ruky?
Řešení:

a) logickou úvahou

Každé dítě podá ruku : třikrát 3
Čtyři děti podají ruku : čtyřikrát více 3 . 4
Při této úvaze podá ruku Tomáš Honzovi, ale současně Honza Tomášovi a proto budeme počítat pouze jedno podání ruky, neboli počet podání se zmenší na polovinu

$$\frac{3.4}{2} = \mathbf{6}$$

obecně : máme n – dětí
Každé dítě podá ruku : (n – 1) krát n-1
sobě ruku nepodává n dětí
podá ruku n krát více n . (n – 1)
celkový počet podání ruky $\frac{n.(n-1)}{2}$

b) tabulkou

Dítě	Tomáš	Honza	Věra	Kamila
Tomáš				
Honza	HT			
Věra	VT	VH		
Kamila	KT	KH	KV	

c) pomocí kombinatoriky

základní množina n = 4
počet prvků ve skupině k = 2
nezáleží na pořadí - kombinace bez opakování
výpočet $K(2;4) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2.1} = \mathbf{6}$

Příklad : Kolik lze sestrojit trojúhelníků, jestliže máme k dispozici sedm bodů (A, B, C, D, E, F , G), z nichž žádné tři body neleží v přímce. Pojmenuj tyto trojúhelníky.
základní množina n = 7
počet prvků ve skupině k = 3
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(3\ ;7) = \binom{7}{3} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.4.3.2.1} = \mathbf{35}$

výčet
ABC
ABD ACD
ABE ACE ADE
ABF ACF ADF AEF
ABG ACG ADG AEG AFG
BCD
BCE BDE
BCF BDF BEF
BCG BDG BEG BFG
CDE
CDF CEF
CDG CEG CFG
DEF
DEG DFG
EFG

Poznámka : Tento zápis má svoji logiku a proto ho používej. Vyhneš se tak možnosti, že na nějakou k-tici zapomeneš.

Příklad 22 : Je dán osmiúhelník.

a) kolik úseček spojuje jeho vrcholy
b) kolik trojúhelníků má své vrcholy ve vrcholech osmiúhelníku
c) kolik čtyřúhelníků má své vrcholy ve vrcholech osmiúhelníku
d) kolik šestiúhelníků má své vrcholy ve vrcholech osmiúhelníku.

Příklad : Trenér má k dispozici šest hráčů : Adamíru, Beneše, Caldu, Dandu, Emila a Fišera. Má sestavit tříčlenné družstvo.
a) kolik družstev může sestavit
b) vypiš všechny možné sestavy
c) vypiš všechny sestavy, jestliže z trojice Adamíra, Beneš a Calda hraje jen jeden
d) vypiš všechny sestav, jestliže k podmínce c přidáme další : z trojice Calda, Emil a Fišera jeden nehraje
e) vypiš všechny sestavy, jestliže k podmínce d přidáme další : z dvojice Beneš, Emil hraje jen jeden
f) vypiš všechny sestavy, jestliže k podmínce e přidáme další : současně nehraje Emil a Fišera.

Řešení :

a) kolik družstev může sestavit,

základní množina $n = 6$

počet prvků ve skupině $k = 3$

nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(3 ; 6) = \binom{6}{3} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2.1} = \mathbf{20}$

b) vypiš všechny možné sestavy,
ABC
ABD ACD
ABE ACE ADE
ABF ACF ADF AEF
BCD
BCE BDE
BCF BDF BEF
CDE
CDF CEF
DEF

c) vypiš všechny sestavy, jestliže z trojice Adamita, Beneš a Calda hraje jen jeden,
podmínce z výčtu b odpovídají pouze : ADE, ADF, AEF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF.

d) vypiš všechny sestav, jestliže k podmínce c přidáme další : z trojice Calda, Emil a Fišera jeden nehraje, podmínce z výčtu c odpovídají pouze : AEF, BEF, CDE, CDF.

e) vypiš všechny sestavy, jestliže k podmínce d přidáme další : z dvojice Beneš Emil hraje jen jeden,

podmínce z výčtu d odpovídají pouze : AEF, CDE.

f) vypiš všechny sestavy, jestliže k podmínce e přidáme další : současně nehraje Emil a Fišera
podmínce z výčtu e odpovídá pouze : CDE.

Příklad 23 : Trenér má z 6 hráčů (Pavla, Karla, Oldu, Ivana, Roberta, Evžena) sestavit tříčlenná družstva. Jaké může být složení těchto družstev, musí-li splňovat tuto podmínku :
a) z trojice Karel, Olda, Ivan hraje pouze jeden hráč
b) z trojice Karel, Olda, Ivan hrají právě dva hráči
c) z trojice Karel, Olda, Ivan hrají alespoň dva hráči
d) z trojice Karel, Olda, Ivan jeden nehrál
e) z trojice Karel, Olda, Ivan dva nehráli
f) z dvojice Pavel, Karel hraje jen jeden
g) nehraje současně Pavel a Karel

Příklad 24 : Jirka s Honzou hráli kuželky. Za poražení krále se počítají 2 body, za ostatní kuželky (je jich osm) se počítá 1 bod. Kolika způsoby může Jirka získat 5 bodů?

Příklad 25 : Klíč k určitému typu zámku může mít jeden až devět zoubků. Kolik je možné vyrobit celkem, klíčů ?

Příklad : Minisportka je hra, při které se ze sedmi číslic (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) losují tři číslice.

a) kolik existuje možných trojic, které mohou být vylosovány
b) vypiš všechny tyto trojice
c) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, které trojice vyhrávají druhé pořadí (musí správně uhodnout dvě čísla v trojčíslí)
d) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě c
e) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, které trojice vyhrávají třetí pořadí (musí správně uhodnout jedno číslo v trojčíslí)
f) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě e
g) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, která trojice nevyhrála žádné pořadí (neuhodla ani jedno číslo v trojčíslí)
h) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě g.

Výpočet : - ve všech podbodech jde o kombinace

a) kolik existuje možných trojic, které mohou být vylosovány,

základní množina	n = 7
počet prvků ve skupině	k = 3
nezáleží na pořadí	kombinace bez opakování
výpočet	$K(3\ ;7) = \binom{7}{3} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.4.3.2.1} = \mathbf{35}$

b) vypiš všechny tyto trojice,

123				
124	134			
125	135	145		
126	136	146	156	
127	137	147	157	167
234				
235	245			
236	246	256		
237	247	257	267	
345				
346	356			
347	357	367		
456				
457	467			
567				

c) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, které trojice vyhrávají druhé pořadí (musí správně uhodnout dvě čísla v trojčíslí)
- uhodl-li hráč číslice 3 a 4, pak musel mít trojčíslí : 341, 342, 345, 347
- uhodl-li hráč číslice 4 a 6, pak musel mít trojčíslí : 461, 462, 465, 467
- uhodl-li hráč číslice 3 a 6, pak musel mít trojčíslí : 361, 362, 365. 367

Jestliže víme, že hráč uhodl pouze dvě číslice a nevíme které, pak mohl mít trojčíslí : 341, 342, 345, 347, 361, 362, 365. 367,
461, 462, 465, 467.

d) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě c,
Uhodl-li hráč dvě číslice ze tří, pak se jedná o kombinace druhé třídy ze tří (n = 3, k = 2)
Těchto kombinací je K (2 ; 3) = $\binom{3}{2}$ = 3 (jde o dvojice 34 36 46)
Hráč tedy neuhodl jednu číslici ze čtyř (celkem bylo sedm číslic a z toho byly tři číslice taženy). Neboli budeme vytvářet „jednotice“ z čtyř prvků. jde tedy o kombinace první třídy ze čtyř prvků. Těchto kombinací je K (1 ; 4) = $\binom{4}{1}$ = 4
Každé dvojici musíme přiřadit různou „jednotici“. Počet těchto trojic vypočteme 3 . 4 = 12
Výpočtem jsme ověřili správnost výčtu trojic, které jsme provedli v bodě c.

e) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, které trojice vyhrávají třetí pořadí (musí správně uhodnout jedno číslo v trojčíslí)

312	325	412	425	612	625
315	327	415	427	615	627
317	357	417	457	617	657

f) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě e,

Uhodl-li hráč jednu číslici ze tří, pak se jedná o kombinace první třídy ze tří (n = 3, k = 1)
Těchto kombinací je K (1 ; 3) = $\binom{3}{1}$ = 3 (jde o číslice 3, 4, 6)
Hráč tedy neuhodl dvě číslice ze čtyř (celkem bylo sedm číslic a z toho byly tři číslice taženy). Neboli budeme vytvářet dvojice ze čtyř prvků. jde tedy o kombinace druhé třídy ze čtyř prvků. Těchto kombinací je K (2 ; 4) = $\binom{4}{2}$ = 6
Každé „jednotici“ musíme přiřadit různou dvojici. Počet těchto trojic vypočteme 3 . 6 = 18
Výpočtem jsme ověřili správnost výčtu trojic, které jsme provedli v bodě e.

g) byla-li tažena čísla 3, 4, 6, která trojice nevyhrála žádné pořadí (neuhodla ani jedno číslo v trojčíslí

125 127 157 257

h) výpočtem ověř správný počet výčtu v bodě g.

Máme-li vytvořit trojice z číslic, které nebyly taženy, tak si musíme uvědomit, že máme k dispozici čtyři číslice (tři z celkových sedmi byly taženy) a z nich tvoříme trojice. Jde tedy o kombinace třetí třídy ze čtyř prvků.

$$K (3 ; 4) = \binom{4}{3} = \mathbf{4}$$

Jiný postup výpočtu :

Celkem existuje trojic :	35	
první místo má trojic :	1	(trojice 346)
druhé místo má trojic :	12	(podotázka c, d)
třetí místo má trojic :	18	(podotázka e, f)
čtvrté místo má trojic :	35 – (1 + 12 + 18) = **4**	
	(dostali jsme stejný výsledek)	

Příklad 26 : Z devíti písmen losujeme pět písmen. Kolik existuje kombinací, aby tři písmena byla správná ?

Příklad 27 : Z 8 písmen vybíráme 5-tice, kde budou právě tři dobře. Kolik bude 5-tic?

Příklad 28 : Z 8 písmen vybíráme 5-tice, kde budou dobře alespoň tři dobře. Kolik bude 5-tic?

Příklad 29 : Z 8 písmen vybíráme 5-tice, kde budou dobře maximálně tři dobře. Kolik bude 5-tic?

Příklad : Pracujeme s 5 bílými , 7 červenými a 6 modrými kuličkami.
a) kolik vznikne různých trojic
b) kolik vznikne jednobarevných trojic
c) kolik vznikne tříbarevných trojic
d) kolik vznikne dvoubarevných trojic ?

a) kolik vznikne různých trojic

základní množina	n = 5 + 7 + 6 = 18
počet prvků ve skupině	k = 3
nezáleží na pořadí	kombinace bez opakování

výpočet $$K (3 ; 18) = \binom{18}{3} = \mathbf{816}$$

b) kolik vznikne jednobarevných trojic

\- bílých :
základní množina n = 5

počet prvků ve skupině k = 3
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(3; 5) = \binom{5}{3} = 10$

- červených :
základní množina n = 7
počet prvků ve skupině k = 3
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(3; 7) = \binom{7}{3} = 35$

- modrých :
základní množina n = 6
počet prvků ve skupině k = 3
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(3; 6) = \binom{6}{3} = 20$

celkem jednobarevných vznikne . 10 + 35 + 20 = **65**

c) kolik vznikne tříbarevných trojic

V tříbarevné trojici bude vždy jedna bílá, jedna červená a jedna modrá kulička.
- možnosti bílých :
základní množina n = 5
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(1; 5) = \binom{5}{1} = 5$

- možnosti červených :
základní množina n = 7
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(1; 7) = \binom{7}{1} = 7$

- možnosti modrých :
základní množina n = 6
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

výpočet $K(1;6) = \binom{6}{1} = 6$

Vzhledem k tomu, že ke každé kombinaci bílých kuliček přísluší kombinace červených a modrých kuliček platí pro výpočet :

$$5 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{210}$$

(Uvědom si rozdíl mezi příklady b – c .)

d) <u>kolik vznikne dvoubarevných trojic</u>

zopakování : všech trojic 816
všech jednobarevných trojic 65
všech tříbarevných trojic 210
výpočet : všech dvoubarevných trojic 816 – (65 + 210) = **541**

jiný postup výpočtu :

- počet trojic, kde nebude modrá : bude jedna bílá a dvě červené nebo dvě bílé a jedna červená

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} + \binom{5}{2} \binom{7}{1} = 175$$

- počet trojic, kde nebude bílá : bude jedna červená a dvě modré nebo dvě červené a jedna modrá

$$\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{7}{2} \cdot \binom{6}{1} = 231$$

- počet trojic, kde nebude červená : bude jedna bílá a dvě modré nebo dvě bílé a jedna modrá

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = 135$$

Závěrečný výpočet : 175 + 231 + 135 = **541**

Příklad 30 : Pracujeme se 7 zelenými, 8 žlutými a 5 modrými kuličkami, 6 růžovými a 6 fialovými kuličkami.

a) kolik vznikne různých pětic
b) kolik vznikne jednobarevných pětic
c) kolik vznikne pětibarevných pětic .

Příklad 31 : Z 7 zelených kuliček a 8 žlutých kuliček budeme losovat pět kuliček budeme losovat pět kuliček. Kolik je kombinací, aby tři vytažené kuličky byly zelené ?

Příklad 32 : Z 8 bílých kuliček a 6 červených kuliček vybíráme šestice, na které máme požadavek, aby v nich byly vždy 4 kuličky bílé. Kolik existuje takových kombinací ?

Příklad 33 : Z 6 bílých, 7 červených 4 modrých kuliček vybíráme pět kuliček, z nichž budou dvě bílé, dvě červené a zbytek modrých. Kolik existuje takových kombinací,

10.4.2. Variace bez opakování

Variace je vytváření skupin o k prvků z n prvků, kde záleží na pořadí. Trošku nepřesně, ale pro pochopení je možné prohlásit, že variace jsou kombinace prvků, kde záleží na pořadí.

Příklad Máme čtyři prvky : a, b, c, d.
a) vytvoř výčtem variace 2. třídy
b) vytvoř výčtem variace 3. třídy

a) vytvoř výčtem variace 2. třídy ze 4 prvků

--	ab	ac	ad
ba	--	bc	bd
ca	cb	--	cd
da	db	dc	--

b) vytvoř výčtem variace 3. třídy ze 4 prvků

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Všimni si vytvořeného systému :
1) dva sloupce mají stejný prvek na prvním místě,
2) v lichých sloupcích přiřazujeme k prvnímu prvku různé kombinace zbývajících dvou prvků,
3) v sudých sloupcích zaměníme prvky na druhém a třetím místě.
Výpočet variace provádíme podle vzorce :
$V(k;n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ nebo
$V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Příklad : Vypočítej :

$V(3;4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}$ nebo $V(3;4) = \frac{4!}{1!} = \mathbf{24}$

$V(2;7) = 7 \cdot 6 = \mathbf{42}$ nebo $V(2;7) = \frac{7!}{5!} = \mathbf{42}$

Příklad 34 : Vypočítej : a) V (5 ; 6) = b) V (5 ; 8) =
c) V (3 ; 6) = d) V (3 ; 9) = e) V (3 ; 7) =
f) V (4 ; 6) = g) V (6 ; 7) = h) V (4 ; 10) =

Příklad : Do finálového závodu ve sprintu na 100 metrů se kvalifikovalo 8 závodníků. Kolika způsoby mohou být rozděleny medaile (nikdo nedosáhne stejného času) ?

počet prvků ve skupině	k = 3
záleží na pořadí	variace bez opakování
základní množina	n = 8
výpočet	V (3 ; 8) = **336**

Příklad : K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných prvků, je k dispozici látka bílá, červená, modrá, zelená a žlutá.
a) kolik vlajek je možné sestavit,
b) kolik vlajek má modrý pruh uprostřed.
c) kolik z nich má modrý pruh,

<u>a) kolik vlajek je možné sestavit</u>

_základní množina	n = 5
počet prvků ve skupině	k = 3
záleží na pořadí	variace bez opakování
výpočet	V (3 ; 5) = **60 vlajek**

<u>b) kolik z nich má modrý pruh uprostřed</u>

základní množina	n = 4	nepočítáme modrou barvu
počet prvků ve skupině	k = 2	modrá barva je již vybrána
záleží na pořadí	variace bez opakování	
výpočet	V (2 ; 4) = **12 vlajek**	

<u>c) kolik z nich má modrý pruh</u>
modrý pruh však může být nahoře, ve střední části nebo dole a proto
3 . 12 = **36 vlajek**

Příklad : Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy.
a) určete kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře,
b) kolika způsoby lze vybrat funkcionáře klubu tak, aby předsedou a místopředsedou byl vždy lidi různého pohlaví.

a<u>) určete kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře</u>

základní množina	n = 10
počet prvků ve skupině	k = 4
záleží na pořadí	variace bez opakování

výpočet V (4 ; 10) = **5 040**

b) kolika způsoby lze vybrat funkcionáře klubu tak, aby předsedou a místopředsedou byl vždy lidi různého pohlaví

ba) - předseda je muž
základní množina n = 6
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

počet možností volby předsedy K (1 ; 6) = 6

- místopředseda je žena
základní množina n = 4
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

počet možností volby místopředsedy K (1 ; 4) = 4
- jednatel a hospodář
základní množina n = 8 dva lidi byli již zvoleni
počet prvků ve skupině k = 2
záleží na pořadí variace bez opakování
počet možností volby jednatele a hospodáře V (2 ; 8) = 56
S předsedou mohou být všechny kombinace místopředsedy a další dvojice funkcionářů.
Proto počítáme : K (1 ; 6) . K (1 ; 4) . V (2 ; 8) = 6 . 4 . 56 = 1 344

bb) - předseda je žena
základní množina n = 4
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

počet možností volby předsedy K (1 ; 4) = 4

- místopředseda je muž
základní množina n = 6
počet prvků ve skupině k = 1
nezáleží na pořadí kombinace bez opakování

počet možností volby místopředsedy K (1 ; 6) = 6
- jednatel a hospodář
základní množina n = 8 dva lidi byli již zvoleni
počet prvků ve skupině k = 2
záleží na pořadí variace bez opakování

počet možností volby jednatele a hospodáře V (2 ; 8) = 56
S předsedou mohou být všechny kombinace místopředsedy a další dvojice funkcionářů.
Proto počítáme : K (1 ; 6) . K (1 ; 4) . V (2 ; 8) = 6 . 4 . 56 = 1 344
Celkový výsledek : 1 344 + 1 344 = **2 688**

Příklad 35 : K sestavení vlajky, která má být složena ze čtyř různobarevných vodorovných prvků, je k dispozici látka bílá, červená, modrá, zelená, černá, fialová a žlutá.

a) kolik vlajek je možné sestavit,
b) kolik vlajek má zelený pruh nahoře,
c) kolik vlajek má černý pruh.

Příklad 36 : Z kolika prvků je možné sestavit 42 variací bez opakování druhé třídy ?

10.4.3. Permutace bez opakování

Permutace je vytváření skupin o n prvků z n prvků, kde záleží na pořadí.

Příklad : Máš tři prvky (a, b, c). Vytvoř permutace výčtem

abc, acb, bca, bac, cab, cba

Počet permutací vypočítáme podle vzorce : **P (n) = n!**

Příklad : Vypočti permutace pro 4 prvky.

P (4) = 4 . 3 . 2 . 1 = **24**

Příklad : Kolika způsoby se mohou postavit za sebe 3 dívky a 4 chlapci?
základní množina n = 7
počet prvků ve skupině k = 7
záleží na pořadí permutace bez opakování

výpočet P (7) = 7! = **5 040**

Příklad 37 : S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců.

a) určete počet všech možných pořadí
b) určete počet všech pořadí, v nichž vystupuje poslanec A před poslancem B
c) určete počet všech pořadí, v nichž vystoupí poslanec B hned za poslancem A.

Příklad 38 : Z n prvků vytvoříme 40 320 permutací bez opakování. Kolik máme prvků ?

Souhrnná cvičení

1. Kolik zápasů sehrají fotbalisté na podzim a na jaře v první fotbalové lize, která má 16 účastníků ?

2. Vypočítej : a) 7! B) 10! C) 6 ! d) 1! E) 0! F) -5!

3. Vyjádři :

a) 9! pomocí 6!
b) 7! pomocí 3!
c) 8! pomocí 6!
d) k! pomocí (k -2) !
e) (k+ 4)! pomocí k!
f) (k+ 3)! pomocí (k – 2)!

4. Vypočítej :

a) $\binom{10}{5} =$
b) $\binom{10}{8} =$
c) $\binom{9}{6} =$
d) $\binom{9}{7}$
e) $\binom{11}{8} =$
f) $\binom{6}{2} =$
g) $\binom{8}{3} =$
h) $\binom{6}{3} =$
ch) $\binom{7}{6} =$
i) $\binom{8}{4} =$
j) $\binom{8}{1} =$
k) $\binom{5}{3} =$

5. Klíč k jednomu typu zámku může mít jeden až devět zoubků.

a) kolik můžeme vyrobit různých klíčů, které budou mít 4 zoubky
b) kolik můžeme vyrobit různých klíčů, které budou mít 7 zoubků
c) kolik můžeme vyrobit různých klíčů, které budou mít 9 zoubků
d) kolik můžeme vyrobit různých klíčů, které budou mít lichý počet zoubků
e) kolik můžeme vyrobit různých klíčů, které budou mít 10 zoubků
f) kolik můžeme vyrobit různých klíčů.

6.Jirka s Honzou hráli kuželky. Za poražení krále se počítají 2 body, za ostatní kuželky (je jich 8) se počítá 1 bod. Kolika způsoby může Jirka získat pět bodů. (Počítej s možností, že porazí krále i neporazí krále .)

7. Z 10 písmen vytváříme 7 členné skupiny.

a) kolik bude skupin, ve kterých bude právě pět písmen dobře
b) kolik bude skupin, kde bude minimálně pět písmen dobře
c) kolik bude skupin, kde bude maximálně čtyři písmena dobře.

8. V Minimatesu se losuje z 12 čísel pět.

a) kolik bude kombinací, jestliže má být správně tři čísla
b) kolik bude kombinací, jestliže mají být správně čtyři čísla
c) kolik bude kombinací, jestliže má být správně pět čísel
d) kolik bude kombinací, jestliže mají být správně alespoň tři čísla.

9. Při losování ze 17 čísel vybíráme 5 čísel. Kolik bude kombinací, má-li být správně maximálně tři čísla z vytažených pěti?

10. Z 14 čísel se losuje 6 čísel. Kolik vznikne kombinací, máme-li uhodnout maximálně dvě čísla ?

11. V Minimatesu se z 15 čísel losuje 6. Kolik bude kombinací, mají-li být správně alespoň čtyři čísla?

12. Z 11 čísel se losuje 5. Kolik bude kombinací, mají-li být správně alespoň tři ?

13. Ze 7 mužů a 4 žen vytvoříme šestičlenné skupiny.
a) kolik vytvoříme šestičlenných skupin
b) kolik vytvoříme šestičlenných skupin, kde budou právě dvě ženy
c) kolik vytvoříme šestičlenných skupin, kde budou alespoň dvě ženy
d) kolik vytvoříme šestičlenných skupin, kde budou maximálně dvě ženy.

14. Herní systém hokejového turnaje pro 10 družstev spočívá v tom, že v každé ze dvou skupin po pěti družstev sehraje každé a každým jeden zápas. První dvě družstva z každé skupiny postoupí do finálové skupiny. Zde hraje každý s každým s výjimkou družstev, která spolu hrála ve skupině. Určete celkový počet zápasů.

15. Máme šachovnici 8 x 8 políček.
a) kolika kombinacemi můžeme vytvořit trojice políček
b) kolika kombinacemi můžeme vytvořit trojice políček tak, aby trojice políček neležela v témže sloupci
c) kolika kombinacemi můžeme vytvořit trojice políček tak, aby trojice políček neležela v témže sloupci nebo v téže řadě
d) kolika kombinacemi můžeme vytvořit trojice políček, která jsou téže barvy
e) kolika kombinacemi můžeme vytvořit trojice políček, která jsou různé barvy.

16. Spolek má 20 členů, z toho je 8 žen. Kolikerým způsobem lze vybrat tříčlenný výbor spolku tak, aby v něm byla právě jedna žena ?

17. V tanečních se sešlo 24 dívek a 15 chlapců. Kolik vytvoří smíšených tanečních párů?

18. Pro které n platí $\binom{n}{2} = 21$

19. Státní poznávací značka automobilu je tvořena tak, že na prvních třech místech jsou písmena a na dalších čtyřech jsou číslice. Kolik je možné vytvořit značek, máme-li 24 písmen a 10 číslic a žádné číslo ani písmeno se nesmí opakovat ?

20. Na cyklistickou trať vyjelo 15 závodníků. Kolika způsoby můžeme vytvořit všechny možné pětice závodníků, které se umístí:
a) na nejlepších místech v cíli,
b) na nejhorších místech v cíli, jestliže 3 cyklisté během závodu vzdali.

21. Máš k dispozici 24 písmen abecedy.
a) kolik můžeš vytvořit pětičlenných slov – nesmí se opakovat písmeno (v češtině slovo nemusí dávat smysl)
b) kolik můžeš vytvořit jednočlenných slov (v češtině slovo nemusí dávat smysl)
c) kolik můžeš vytvořit maximálně tříčlenných slov – nesmí se opakovat písmeno (v češtině slovo nemusí dávat smysl)

22. Zvětším-li počet prvků o 2, zvětší se počet permutací bez opakování dvanáctkrát. Kolik mám prvků?

23. Kolik slov můžeš vytvořit záměnou písmen ve slově ABCDEF? Vzniklá slova nemusí mít v češtině svůj význam.

24. Kolika způsoby lze rozsadit 4 osoby ke stolu se čtyřmi židlemi

Výsledky :

1)

n	1	2	3	4	5	6
p	0	1	3	6	10	15

2)

n	1	2	3	4	5	6
o	2	4	7	11	16	22

3) a) AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE , b**)** ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE **;** c) 5tice;
4) a) AB, AC, AD, BC, BD, CD; **b)** AD, BC;
5) NF, FN, NA, AN, NR, RN, NI, IN, FA, AF, FR, RF, FI, IF, AR, RA, AI, IA, RI, IR;
6) a) 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36; **b)** 225, 234, 243;
7) a) 403 km; 660 km; 324 km; **b)** 372 km; 718 km; 703 km;
8)

A					
20,3	B				
30,7	10,4	C			
43	22,7	12,3	D		
65,7	45,4	35	22,7	E	
91,3	71	60,6	48,3	25,6	F

9) a) AB

AC BC
AD BD CD
AE BE CE DE;

b) $\frac{5.(5-1)}{2}$ = 10; **c)** $\frac{n.(n-1)}{2}$;

10) a) AC AD BD BE CE;

b) $\frac{5.(5-3)}{2}$ = 5; **c)** $\frac{n.(n-3)}{2}$;

11) a) 27; **b)** 39;

12) 4 nebo 5 černých bodů;

13) a)

b)

Černé body	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Modré body	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Počet úseček	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0

$\frac{4.(4-1)}{2}$ = 6;
AB
AC BC
AD BD CD ; **c)** $\frac{n.(n-1)}{2}$;

14) a) 9; **b)** 90; c) n.(n-1);

15) a) 4; **b)** 16;

16) a) 5 040 ; **b)** 3 628 800 ; **c)** 1 307 674 368 000; **d)** nemá řešení;

17) například **a) (**k+4).(k+3).(k+2).(k+1).k!; **b)** (k-2).(k-3)!; **c)** (a+1).k!;
d) e.(e-1).(e-2)!,

18) a) k.(k-1).(k-2).(k-3)!; **b)** (k+2).(k+1).k! ; **c)** (k+3).(k+2).(k+1).k.(k-1);
.(k- 2).(k-3)! ,

19) a) 35; **b)** 6; **c)** 5;´ **d)** 252; **e)** 45; **f)** 84; **g)** 36; **h)** 165; **i)** 15;

20 a) kombinace; **b)** kombinace; **c)** variace; **d)** permutace; **e)** permutace;
f) variace; **g)** permutace;

21) a) 84; **b)** 36; **c)** 252; **d)** 165; **e)** 45; **f**) 165;

22) a) 28; **b)** 56; **c)** 70; **d)** 28;

23) a) PKR, POR, PIR, PKE, POE, PIE, KRE, ORE, IRE;
b) PKO, PKI, POI, KOR, KIR, KOE, KIE, OIR, OIE;
c) stejné jako b + KOI;
d) (hráli dva) – stejné jako b;
e) (hrál jeden) – stejné jako a;
f) POI, POR, POE, PIR, PIE, PRE, KOI, KOR, KOE, KIR, KIE, KRE
g) stejné jako f + kdy nehraje ani jeden OIR, OIE, ORE, IRE;

24) bez krále K (5;8) + s králem K (3;8) = 112 způsoby;

25) K(1;9) + K(2;9) + … + K(9;9) = 9+36+84+126+126+84+36+9+1 =
511 způsobů;

26) 60;

27) $\binom{5}{3}.\binom{3}{2}$ = 30 ;

28) $\binom{5}{3}.\binom{3}{2}$ + $\binom{5}{4}.\binom{3}{1}$ + 1 = 46 ,

29) $\binom{5}{3}.\binom{3}{2} + \binom{5}{2}.\binom{3}{3} = 40$,

30 a**)** $\binom{32}{5} = 201\,376$, b) $\binom{7}{5} + \binom{8}{5}+\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{6}{5} = 90$, c**)** 7.8.5.6.6=10 080 ,

31) K (3; 7) . K (2; 8) = 980
32) K (4; 8) . K (2; 6) =1 050;
33) K (2; 6) . K (2; 7) . K (1; 4) = 1 260;
34 a) 720 , b**)** 6 720 , c**)** 120 , d**)** 504 , e**)** 210 , f**)** 360, g**)** 5 040 , h**)** 5 040 ,
35 a**)** 840 , b**)** 120 , c**)** 480 ,

36) $42 = \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow 7$,

37 a**)** 720 , b**)** 360 , c**)** 120 ,
38) 8 ,

Výsledky souhrnných cvičení :

1) 240 , **2** a) 5 040 , b**)** 3 628 800 , c**)** 720 , d**)** 1 , e) 1 , f**)** nemá řešení ,
3 a**)** 9.8.7.6! , b**)** 7.6.5.4.3! , c**)** 8.7.6! , d**)** k. (k-1) . (k-2)! ,
e**)** (k+4).(k+3).(k+2).(k+1).k! , f**)** (k+3).(k+2).(k+1).k.(k-1).(k-2)! ,
4 a**)** 252 , b**)** 45 , c**)** 84 , d**)** 36 , e**)** 165 , f**)** 15, g**)** 56, h**)** 20 , ch**)** 7 , i**)** 70 , j**)** 8 , k) 10
5 a) 126 , b) 36 , c**)** 1 , d) 256 , e) nemá řešení , f) 511 ,
6) 112 , **7** a) 63 , b**)** 85 , c**)** 35 , **8** a) 210 , b**)** 35 , c) 1 , d) 246 , **9)** 660 ,
10) 1 414 , **11)** 595 , **12)** 181 , **13** a**)** 462 , b**)** 210 , c) 371 , d**)** 301 ,
14) 24 zápasů ,
15 a) 41 664 , b**)** 41 664 – 8.K(3;8) = 41 216 , c) 40 768 , d) 2.K(3;32) = 9 920 , e) 41 664 – 9 920 = 31 744 ,
16) 528 ,**17)** 360 párů ,**18)** 7 ,**19)** 61 205 760 ,**20** a**)** 360 360 , b**)** 95 040 ,
21 a) 5 100480 , b**)** 24 , **c)** 12 720 ,**22)** 2 ,**23)** 720 ,**24)** 24 ,