7. Shodná zobrazení

7.1. Shodnost geometrických obrazců

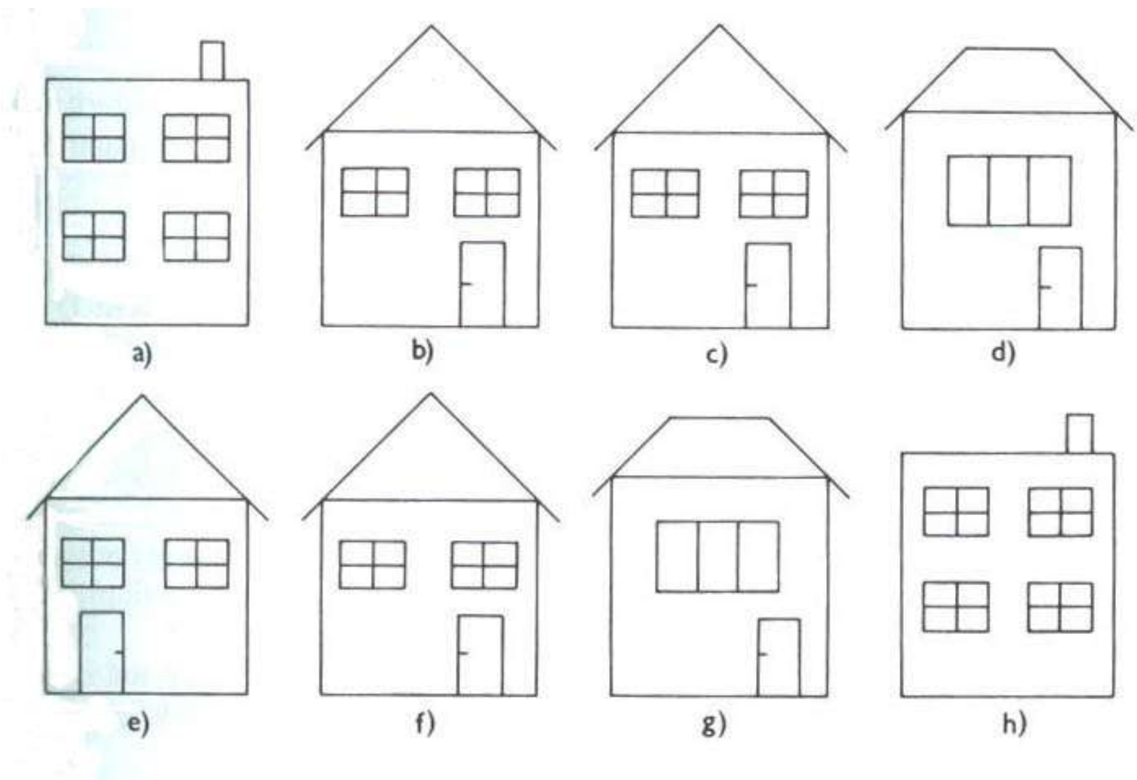
Zobrazení v rovině je předpis, který každému bodu X roviny připisuje právě jeden bod X´ roviny. Bod X se nazývá **vzor**, bod X´se nazývá **obraz**.

Zobrazení považujeme za **shodné**, jestliže vzniklý obraz vzoru je shodný obrazec.

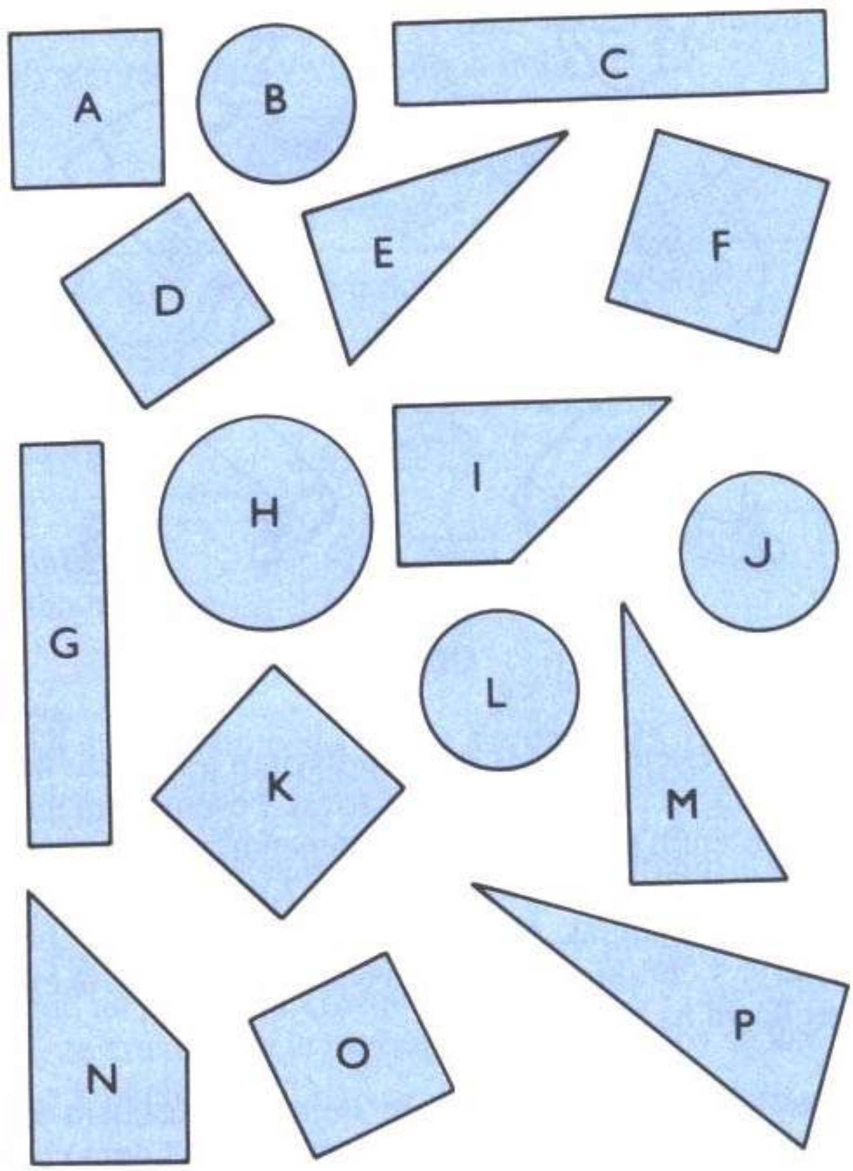
Geometrické obrazce, které po přemístění se krytí, jsou **shodné obrazce**.
Shodný obrazec má stejný tvar i velikost.

Názornou představu shodného zobrazení dává přemístění užitím průsvitky. Je dán útvar U. Překreslíme ho na průsvitku. Průsvitku přemístíme buď tak, že ji ponecháme vzhledem k rovině lícem nahoru (**shodnost přímá**) nebo obrátíme lícem dolů (**shodnost nepřímá**). Útvar v přemístěné poloze překreslíme zpět do roviny. Dostaneme nový útvar U´, který je shodný s útvarem U.

Příklad 1 : Určete shodné obrazce.



Příklad 2 : Určete shodné obrazce :



Shodná zobrazení : osová souměrnost;
středová souměrnost;
posunutí;
otočení.

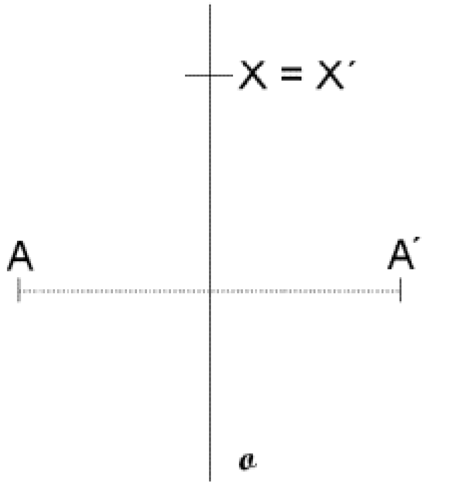
7.2. Konstrukce obrazců v osové souměrnosti

Osová souměrnost je shodné zobrazení.
Osová souměrnost je dána osou souměrnosti, která dělí rovinu na dvě poloroviny. Odpovídající si body leží na kolmici k ose souměrnosti v opačných polorovinách a ve stejné vzdálenosti od osy**.**

Osovou souměrnost můžeme zapsat: **O(o): A → A'.**

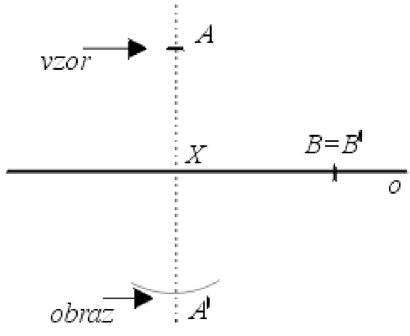
Čteme: obrazem bodu *A* v osové souměrnosti je bod A'.

Body ležící na ose souměrnosti nazýváme samodružné (X = X'), vzor a obraz jsou totožné.

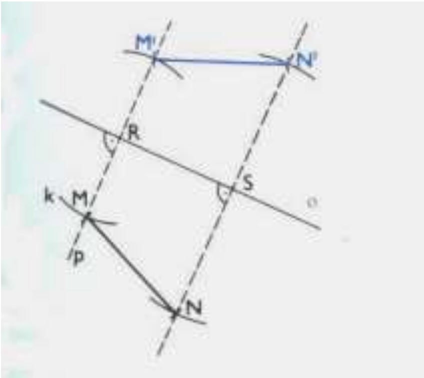


Příklad : Sestrojte v osové souměrnosti : a) bod ; b) úsečku; c) trojúhelník;

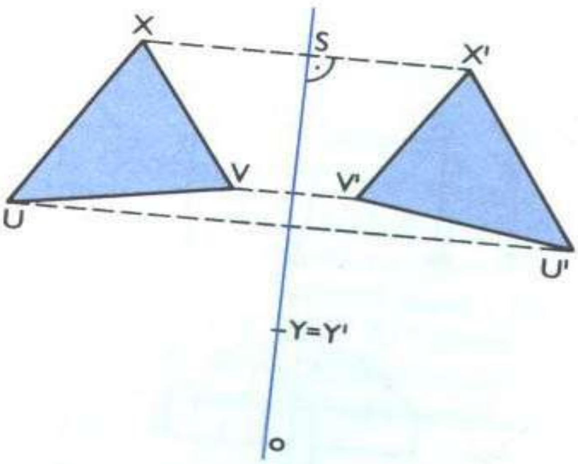
Řešení : a)Bodem A narýsujeme kolmici AX k ose souměrnosti. Kružítkem přeneseme vzdálenost bodu A od osy <u>o</u> na opačnou polopřímku k polopřímce XA.



b) Jako v předcházejícím příkladě narýsujeme obrazy bodů M a N. Úsečka M´N´ je obrazem vzoru MN.



c)Obdobným postupem sestrojíme obrazy vrcholů trojúhelníka UVX. Obrazy těchto bodů jsou vrcholy nového trojúhelníka, který je obrazem původního trojúhelníka UVX.



Příklad 3 : V rovině zvolte 6 různých bodů K, L, M, N, O, P,. Narýsujte jejich obrazy v osové souměrnosti s osou o = ↔ LO. Body volte tak, aby :

a) obrazy bodů K, M ležely ve stejné polorovině s hraniční přímkou o jako body N, P
b) obrazy bodů K, M ležely v opačné polorovině s hraniční přímkou o než body N, P
c) body K, M, N, P byly samodružné.

Příklad 4 : Sestrojte obraz úsečky $|MN| = 7$ cm v osové souměrnosti s osou o, která :

a) protíná úsečku MN v jednom bodě, který není totožný s jejím krajním bodem
b) protíná úsečku MN ve středu a je na ni kolmá
c) je rovnoběžná s úsečkou MN
d) protíná úsečku MN v bodě N a není kolmá k úsečce MN.

Příklad 5 : Sestrojte obraz úhlu $\beta = 45^0$ v osové souměrnosti s osou o, která :

a) leží mimo úhel beta
b) prochází vrcholem a neměla s úhlem beta žádný další společný bod
c) protíná obě ramena úhlu beta.

Příklad 6 : Sestrojte obraz kruhu K, který je ohraničen kružnicí k (S, 3 cm), v osové souměrnosti s osou o, která:

a) prochází středem S kruhu K
b) prochází mimo kruh K
c) prochází kruhem K, ale neprochází jeho středem.

Příklad 7 : Sestrojte obraz libovolného obdélníku ABCD v osové souměrnosti s osou o, která prochází:

a) body AB
b) s obdélníkem má společný pouze bod C
c) body AC.

Příklad 8 : Kolik os souměrnosti má každá :

a) úsečka b) polopřímka c) přímka.

Příklad 9 : Jsou dány body A a B, pro které platí / AB / = 6cm. Sestrojte osu souměrnosti tak, aby :

a) bod A byl obrazem bodu B
b) bod B byl obrazem bodu A
c) oba body netvořily dvojici – vzor ; obraz.

Příklad 10 : Určete osu o osové souměrnosti, ve které je kružnice k se středem S a poloměrem 2 cm obrazem kružnice l se středem L a poloměrem 2 cm, za předpokladu, že /SL/ = 6 cm.

Příklad 11 : Je dána kružnice k se středem S a průměrem AB, /AB/ = 3,5 cm. Sestrojte obraz kružnice k v osové souměrnosti s osou o, která prochází body AB.

Příklad 12 : Sestrojte obraz trojúhelníka KLM v osové souměrnosti s osou o, jestliže osa o a trojúhelník KLM nemají žádný společný bod.

Příklad 13 : Které dvě kružnice :

a) jsou shodné
b) nejsou shodné.

Příklad 14 : Sestrojte obraz přímky p v osové souměrnosti s osou o, jestliže přímky p a o jsou :

a) rovnoběžné a nejsou totožné
b) totožné
c) na sebe kolmé
d) různoběžné

Příklad 15 : Je dána polopřímka PX. Sestrojte její obraz v osové souměrnosti s osou o, jestliže :
a) osa o prochází bodem P, přímky PX a o jsou různoběžné
b) osa o prochází bodem P, přímka PX je kolmá k ose o
c) osa o je totožná s polopřímkou PX .

Příklad 16 : Sestrojte trojúhelník A'B'C' souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle osy souměrnosti o. Osu souměrnosti zvolte tak, aby :
a) neprotínala trojúhelník ABC
b) s trojúhelníkem měla pouze jeden bod společný
c) s trojúhelníkem měla více než jeden bod společný.

Příklad 17 : Je dán čtverec KLMN s délkou strany 3,5 cm. Sestrojte obraz čtverce KLMN v osové souměrnosti s osou o. Osa souměrnosti o prochází :
a) bodem L
b) body KL
c) body KM
d) se čtvercem nemá žádný společný bod

Příklad 18 : Sestrojte obraz kruhu K se středem A a poloměrem 3 cm v osové souměrnosti s osou o. Kruh K a přímka o :
a) nemají žádný společný bod
b) mají jeden společný bod
c) přímka o prochází středem kruhu K
d) přímka o protíná kružnici k, která ohraničuje kruh K, ve dvou bodech.

Příklad 19 : Sestrojte pravidelný šestiúhelník ABCDEF o straně 3 cm. Sestrojte jeho obraz A'B'C'D'E'F' v osové souměrnosti s :
a) osou AC
b) osou AB
c) osou AD
d) osou SF, kde bod S je středem šestiúhelníka

Příklad 20 : Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b. Sestrojte obraz přímky a v osové souměrnosti podle přímky b.

Příklad 21 : Je dána lomená čára body A, B, C, D. Sestrojte obraz této lomené čáry v osové souměrnosti podle osy AB.

Příklad 22 : Je dán trojúhelník ABC o straně délky a = b = c = 5 cm. Zvolte bod E tak, aby náležel přímce AB a nenáležel trojúhelníku ABC. Sestrojte trojúhelník A'B'C' souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle přímky CE.

Příklad 23 : Je dán trojúhelník ABC o straně délky a = b = c = 5 cm. Zvolte bod E tak, aby náležel přímce AB a nenáležel trojúhelníku ABC. Sestrojte trojúhelník A'B'C' osově souměrně s trojúhelníkem ABC podle přímky AE.

Příklad 24 : Je dán obdélník KLMN o stranách délky 7 cm a 3 cm. Mezi body K, L zvolte bod R tak, že $|KR| = 5$ cm. Sestrojte obraz obdélníku KLMN v osové souměrnosti s osou RM.

Příklad 25 : Které přímky jsou v osové souměrnosti samodružné?

Příklad 26 : Je dán libovolný čtyřúhelník ABCD. Sestrojte k němu čtyřúhelník osově souměrný tak, aby v této souměrnosti byl vrcholu A přiřazen bod A', který je totožný se středem strany BC.

Příklad 27 : Sestrojte čtverec ABCD a = 4,5 cm. Sestrojte čtverec osově souměrný tak, aby:

a) vrchol B byl obrazem bodu A

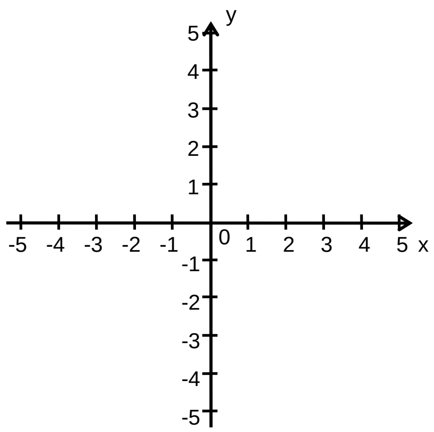
b) vrchol C byl obrazem bodu A

c) střed strany BC byl obrazem bodu A

d) obraz bodu A byl mimo čtverec ABCD

V geometrii k zobrazení bodů a jednotlivých obrazců můžeme používat soustavu souřadnic. Tato soustava souřadnic nám umožňuje jednoznačně určit polohu jednotlivých bodů.

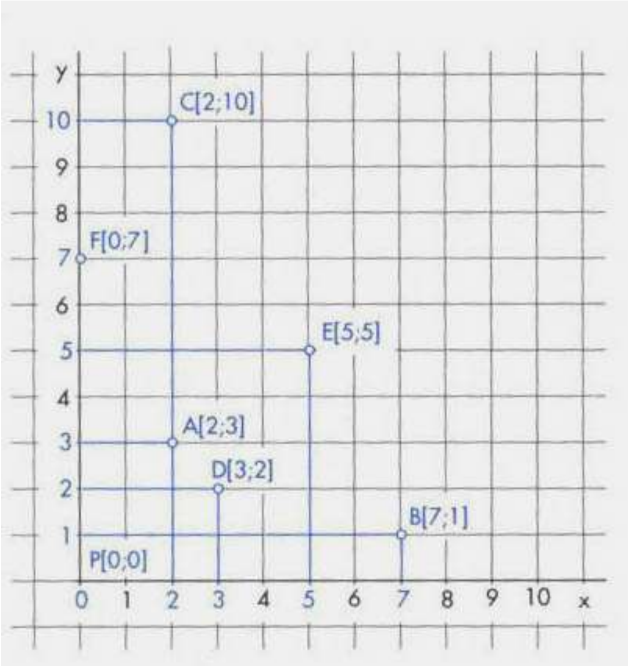
Soustava souřadnic je určena dvěma navzájem kolmými přímkami (číselnými osami) x a y.



Příklad : Zobrazte v souřadném systému body : A ≡ [2;3]; B ≡ [7;1]; C ≡ [2;10]; D ≡ [3;2]; E ≡ [5;5]; F≡ [0;7]; P ≡ [0;0]

Řešení :

V souřadném systému normálně vyznačujeme pouze název bodu. V našem obrázku pro lepší pochopení jsme ještě vyznačili souřadnice daného bodu.



Příklad 28 : Zobrazte čtverec ABCD A ≡ [2;3] B ≡ [2;5]. Sestrojte čtverec souměrně sdružený podle osy o ≡ XY je-li :

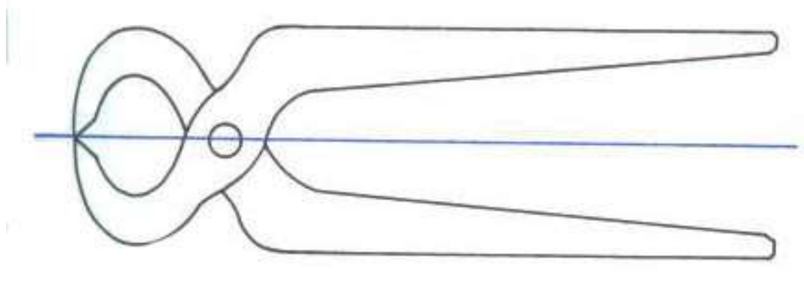
a) X ≡ [1;5] Y ≡ [1;7]
b) X ≡ [1;5] Y ≡ [-3;5]
c) X ≡ [-1;5] Y ≡ [2; -7]
d) X ≡ [0; 0] Y ≡ [0;7]
e) X ≡ [0;0] Y ≡ [1;0]

Příklad 29 : Zobrazte rovnoběžník ABCD A ≡ [2;3] B ≡ [4;5] C ≡ [5;7]. Určete souřadnice bodu D. Sestrojte osově souměrný rovnoběžník podle osy
o ≡ XY je-li :

a) X ≡ [-1;3] Y ≡ [-1;6]
b) X ≡ [1;-5] Y ≡ [-2;4]
c) X ≡ [-1;5] Y ≡ [2; -7]
d) X ≡ [0; 0] Y ≡ [0;7]
e) X ≡ [0;0] Y ≡ [1;0]

7.3. Osově souměrné obrazce

Jestliže se v osové souměrnosti každý bod daného obrazce zobrazí do bodu tohoto obrazce, říkáme, že obrazec je **osově souměrný.** Přímka podle které se tyto body zobrazují nazýváme **osou souměrnosti**.



Příklad 30 : Narýsuj kružnici k(S; 3,5 cm) a najděte aspoň tři její osy souměrnosti. Kolik os souměrnosti má kružnice?

Příklad 31 : Kolik os souměrnosti má :

a) úsečka
b) přímka
c) polopřímka
d) čtverec
e) obdélník
f) kružnice
g) kruh

Příklad 32 : Je dán čtverec KLMN o straně 5 cm. Sestrojte všechny jeho osy souměrnosti.

Příklad 33 : Narýsujte libovolný obdélník ABCD a vyznačte jeho osy souměrností.

Příklad 34 : Narýsujte kružnici k určenou středem S a poloměrem 3 cm. Na kružnici zvolte dva libovolné body A a B. Narýsujte osu souměrnosti tohoto obrazce.

Příklad 35 : Pás je v geometrii definován jako množina všech bodů mezi dvěma rovnoběžkami, přičemž body na těchto rovnoběžkách patří pásu. Sestrojte osu pásu, jestliže vzdálenost dvou rovnoběžných přímek r a s je 6 cm.

Příklad 36 : Narýsujte trojúhelník ABC a = 5cm, b = 7 cm c = 8 cm. Narýsujte všechny osy souměrnosti tohoto obrazce.

Příklad 37 : Narýsujte trojúhelník ABC, který má dvě strany stejně dlouhé.
Strana trojúhelníku a = 5cm, b = 7 cm c = a. Narýsujte všechny osy souměrnosti tohoto obrazce.

Příklad 38 : Narýsujte trojúhelník ABC, který má všechny strany stejně dlouhé. Strana trojúhelníku měří 5cm. Narýsujte všechny osy souměrnosti tohoto obrazce.

7.4. Konstrukce obrazců ve středové souměrnosti

Středová souměrnost je zobrazení, které je určeno bodem, který nazýváme **střed souměrnosti .**

Obvykle se značí *S*.

Zápis: S (S) : A → A´

Čteme: obrazem bodu *A* ve středové souměrnosti je bod *A*′ .

Střed souměrnosti je **samodružný bod.** To znamená, že vzor je totožný s obrazem.

Příklad : Ve středové souměrnosti určené bodem S sestrojte obraz:

a) bodu A;

b) úsečky AB, kde střed souměrnosti neleží na přímce AB;

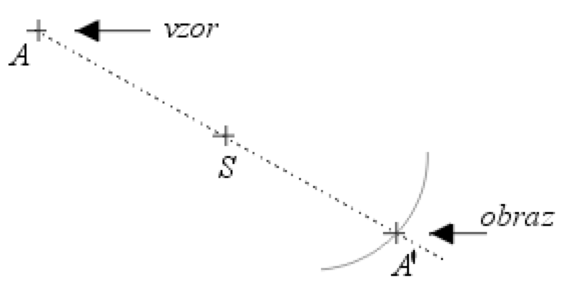
c) úsečky AB, kde střed souměrnosti je totožný s bodem A;

d) úsečky AB, kde střed souměrnosti leží na úsečce AB.

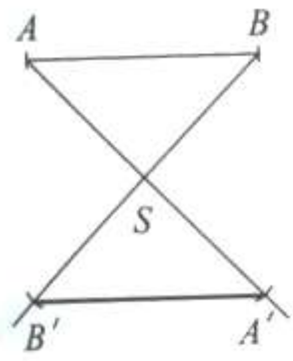
Řešení :a) Sestrojíme polopřímku AS. Kružítkem přeneseme vzdálenost

bodu A od středu S na polopřímku opačnou k polopřímce SA.

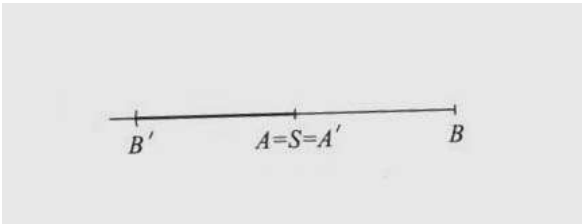
Dostaneme bod A´. Platí : /AS/ = /SA´/.



b) podle předcházejícího příkladu sestrojíme obrazy bodů A a B

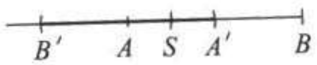


c) podle předcházejícího příkladu sestrojíme obrazy bodů A a B



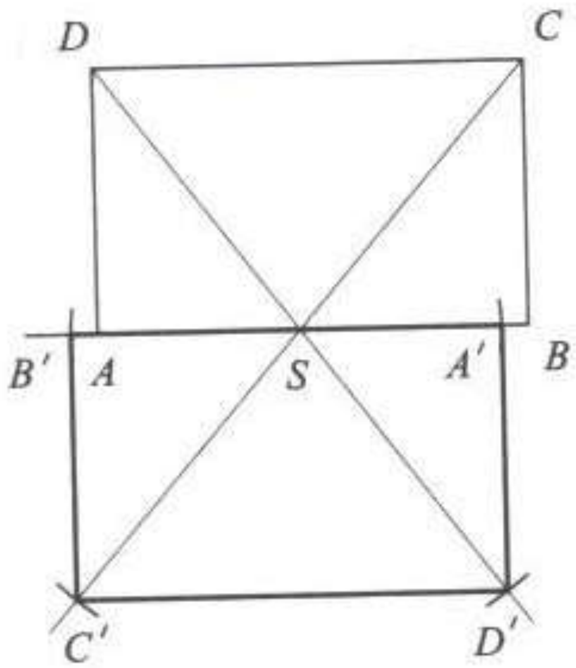
bod A je samodružný

d) podle předcházejícího příkladu sestrojíme obrazy bodů A a B



Příklad : Ve středové souměrnosti podle bodu S sestrojte obraz obdélníka ABCD, kde bod S leží na straně AB

Řešení : sestrojíme obrazy vrcholů obdélníka ve středové souměrnosti



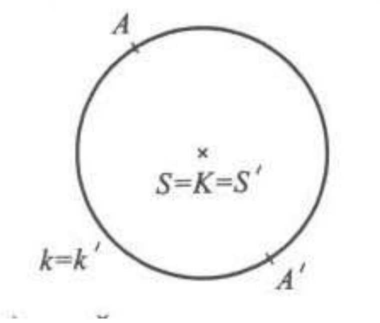
Příklad : Ve středové souměrnosti podle bodu K sestrojte obraz :

a) kružnice k se středem v bodě S, která má střed kružnice totožný se středem souměrnosti. Dále sestrojte obraz bodu A, který leží na kružnici k.

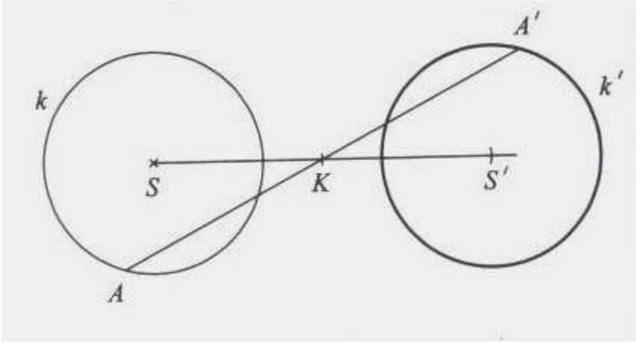
b) kružnice k se středem v bodě S. Střed souměrnosti leží mimo kruh K. Dále sestrojte obraz bodu A, který leží na kružnici k,

Řešení :

a) vzor i obraz kružnice jsou totožné, protože mají střed totožný se středem souměrnosti.



b)vzor i obraz kružnice nejsou totožné, protože nemají střed totožný se středem souměrnosti.



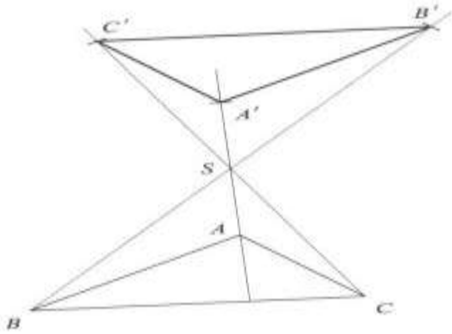
Příklad : Sestrojte souměrně sdružený trojúhelník A´B´C´ s trojúhelníkem ABC podle bodu S, jestliže střed souměrnosti leží :

a) mimo trojúhelník ABC

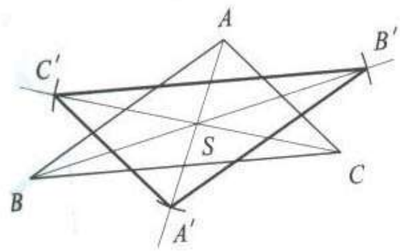
b) uvnitř trojúhelníka ABC

c) je totožný s vrcholem C.

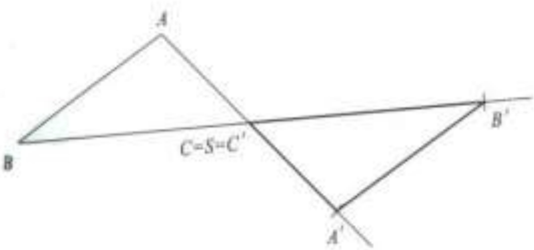
Řešení : a)



b)



c)



Příklad 39 : V rovině zvolte dva různé body C a S. Sestrojte obraz C´ bodu C ve středové souměrnosti se středem S. Zapište, že body C´a C jsou souměrně sdružené podle bodu S.

Příklad 40 : Zvolte body A, B, C, D a S. Sestrojte obrazy bodů A, B, C, D ve středové souměrnosti se středem S.

Příklad 41 : Narýsujte přímku p a vyznačte na ní tři různé body K, L, M tak, aby bod L ležel mezi body K a M. Sestrojte obraz úsečky KL ve středové souměrnosti se středem M.

Příklad 42 : Sestrojte obraz polopřímky XY ve středové souměrnosti se středem S, jestliže a) X ≡ S; b) Y ≡ S; c) $S \in \mapsto YX$.

Příklad 43 : Sestrojte obraz dané úsečky ve středové souměrnosti s daným středem S jestliže
a) bod S na této úsečce neleží
b) bod S je jejím krajním bodem
c) bod S je jejím vnitřním bodem.

Příklad 44 : Sestrojte obraz úsečky /AB/ = 7 cm ve středové souměrnosti se středem S, jestliže a) $S \in AB$, /AS/ = 4 cm; b) $S \in \mapsto AB$.

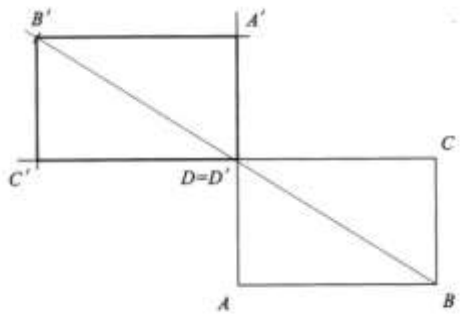
Příklad 45 : Sestrojte obraz úhlu α ve středové souměrnosti se středem S, jestliže
a) S leží ve vrcholu úhlu α
b) S leží na jednom rameni úhlu α
c) S leží vně úhlu α.

Příklad 46 : Narýsujte úhel AVB o velikosti 40^0 . Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem
a) V b) A c) B

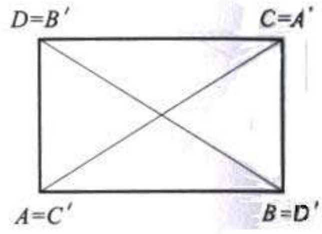
Příklad 47 : Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník A´B´C´, který je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti:
a) se středem v bodě S, který je střed strany AC
b) ve kterém je obrazem bodu A bod B.

Příklad 48 : Narýsujte kružnici k (S; 2,5 cm). Sestrojte obraz kružnice k ve středové souměrnosti se středem O. Bod O volte tak, aby :
a) /SO/ = 3,5 cm, c) O ≡ S
b) /SO/ = 2,5 cm d) /SO/ = 10 mm

Příklad 49 : Určete střed souměrnosti, která převede obdélník ABCD v obdélník A´B´C´D´.
a)



b)



Příklad 50 : Jsou dány dvě kolmé přímky k a l. Sestrojte jejich obrazy ve středové souměrnosti se středem S, jestliže : a) S leží na průsečíku přímek k a l
b) S leží na přímce k a není totožný s průsečíkem přímek k a l
c) S leží na přímce l a není totožný s průsečíkem přímek k a l.

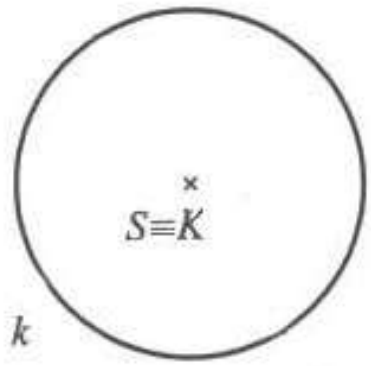
Příklad 51: Narýsujte čtverec ABCD o straně délky 5 cm. Na straně CD vyznačte bod X tak, aby /DX/ = 3 cm. Sestrojte obraz čtverce ABCD ve středové souměrnosti se středem X.

Příklad 52 : Sestrojte obraz kruhu K (O; r) ve středové souměrnosti se středem S, jestliže:
a) O je totožný s bodem S
b) S leží na kružnici, která tento kruh ohraničuje
c) S leží uvnitř kruhu, d) S leží vně kruhu.

Příklad 53 : Narýsujte pravidelný šestiúhelník ABCDEF se stranou délky 3 cm. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem A.

7.5. Obrazce středově souměrné

Středově souměrný obrazec je například kružnice podle svého středu , protože každý bod kružnice se ve středové souměrnosti podle středu kružnice zobrazí zase jako bod dané kružnice.



Příklad 54 : Které z následujících útvarů jsou středově souměrné: a) úsečka b) polopřímka c) obdélník d) kruh e) kružnice f) čtverec g) kosočtverec h) obdélník i) kosoúhelník j) trojúhelník, jehož strany mají různou velikost k) trojúhelník, jehož strany mají stejnou velikost l) trojúhelník, jehož pouze dvě strany mají stejnou velikost. V kladném případě určete střed souměrnosti.

Příklad 55 : Vymyslete si nepravidelný obrazec, který je středově souměrný.

7.6. Posunutí

Posunutí je shodné zobrazení, které je určeno orientovanou úsečkou.
Orientovaná úsečka je vedle velikostí (délkou) určena také směrem.

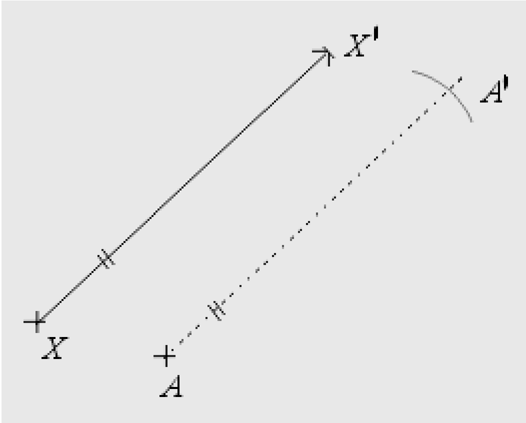
Posunutí nemá žádné samodružné body.

Zápis : P [XX´] : A → A´

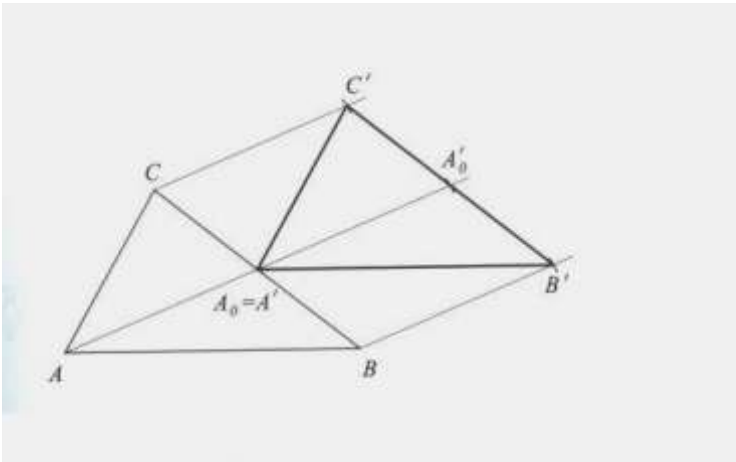
Čteme : obrazem bodu A v posunutí daném orientovanou úsečkou XX´je bod A´.

Příklad : V posunutí daném XX´ sestrojte obraz A´bodu A.

Řešení : Bodem A narýsujeme rovnoběžku s úsečkou XX´a kružítkem přeneseme délku úsečky XX´na připravenou rovnoběžku ve směru posunutí.



Příklad : V posunutí AA_0 sestrojte obraz libovolného trojúhelníka ABC.
Řešení : Sestrojíme obrazy vrcholů trojúhelníka ABC.



Příklad 56 : 1. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v přímce. V posunutí určeném orientovanou úsečkou AB sestrojte obraz

a) úsečky AC
b) bodu C
c) přímky BC
d) přímky AB

Příklad 57 : Narýsujte libovolný kosočtverec ABCD a sestrojte jeho obraz A‘B‘C‘D‘ v posunutí určeném orientovanou úsečkou a) AC b) CA c) DB.

Příklad 58 : Sestrojte trojúhelník ABC (a = b = c = 5 cm) a bod T, který leží uvnitř trojúhelníka. Sestrojte obrazy tohoto trojúhelníku v posunutí určeném orientovanou úsečkou TC.

Příklad 59 : Sestrojte pravidelný šestiúhelník ABCDEF a jeho obraz A‘B‘C‘D‘E‘F‘ v posunutí určeném orientovanou úsečkou SD. S je střed souměrnosti šestiúhelníku ABCDEF. Jaký útvar vznikne sjednocením šestiúhelníku ABCDEF a šestiúhelníku A‘B‘C‘D‘E‘F‘?

Příklad 60 : Sestrojte trojúhelník ABC a = 4 cm, b = 3,7 cm, c = 5 cm a kružnici k (K; 1,7 cm) tak, aby bod A byl středem úsečky CK. Dále sestrojte obraz $\underline{k_1}$ kružnice k v posunutí určeném orientovanou úsečkou AB a obraz $\underline{k_2}$ kružnice $\underline{k_1}$ v posunutí určeném orientovanou úsečkou BC. Co je obrazem kružnice $\underline{k_2}$ v posunutí určeném orientovanou úsečkou CA?

Příklad 61 : Sestrojte libovolný kosodélník KLMN. Sestrojte jeho obraz v posunutí, které je dáno orientovanou úsečkou S_1S_2, kde S_1 je střed strany MN, S_2 je střed strany LM.

Příklad 62 : Je dán obdélník KLMN k = 2,8 cm, l = 1,8 cm. Sestrojte jeho obraz K´L´M´N´v posunutí daném orientovanou úsečkou KM. Dále sestrojte obraz K´´ L´´ M´´ N´´ obdélníku K´L´M´N´v osové souměrnosti s osou o,
o = ↔ KL.

7.7. Otočení

Otočení neboli rotace je zobrazení, které je určeno bodem, který nazýváme **střed otočení**, a velikostí orientovaného úhlu, kterou nazýváme **úhel otočení**.

Obvykle se značí R.

Zápis: R (S; φ) : A → A´

Čteme: obrazem bodu *A* v otočení je bod A'.

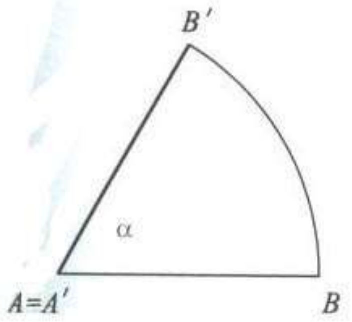
Střed otočení je **samodružný bod.** To znamená, že vzor je totožný s obrazem.

Orientovaný úhel je takový úhel, jehož jedno rameno je určeno jako **počáteční rameno** a druhé rameno jako **koncové rameno**.

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku. Při otáčení může polopřímka vykonat libovolný počet otáček. My se zatím budeme zabývat pouze jedním otočením (jedno otočení … 360°). Při otáčení proti pohybu hodinových ručiček hovoříme o **kladném smyslu**, při otáčení ve směru hodinových ručiček hovoříme o **záporném smyslu**.

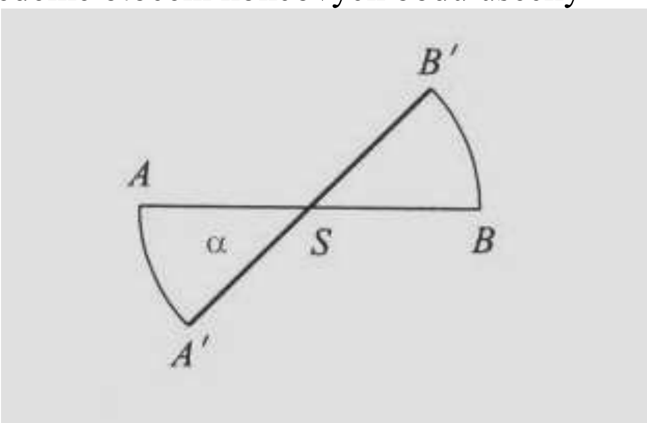
Příklad : V otočení určeném bodem A a úhlem 60° sestrojte :
a) obraz bodu A, který je totožný se středem otočení
b) obraz bodu B, který není totožný se středem otočení.

Řešení : a) b)



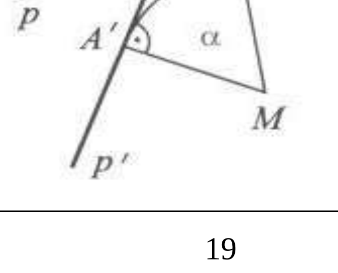
Příklad : V otočení určeném bodem S a úhlem 45º sestrojte obraz úsečky AB, která prochází bodem S.

Řešení : provedeme otočení koncových bodů úsečky

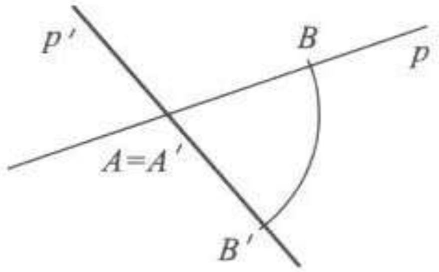


Příklad : V otočení určeném bodem M a úhlem 60º sestrojte obraz přímky p, která neprochází středem otáčení.

Řešení : 1) na přímku p narýsujeme kolmici procházející středem otočení
2) průsečík této kolmice a přímky p označíme jako bod A
3) provedeme otočení bodu A → A´
4) sestrojíme kolmici na úsečku MA´, kterou označíme p´
5) p´ je obraz otočené přímky p

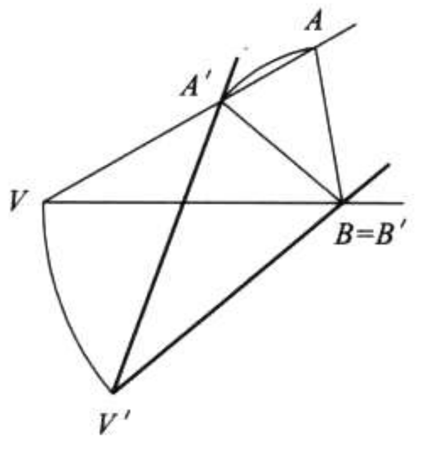


Příklad 63 : Na obrázku je otočení přímky p. Určete střed otočení a smysl otáčení.

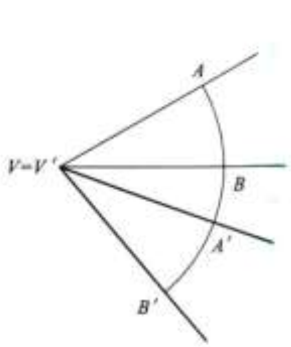


Příklad : V otočení určeném bodem B a úhlem 40º sestrojte obraz úhlu AVB

Řešení : 1) vzhledem k tomu, že bod B je střed otáčení, je obraz i vzor totožný
2) provedeme otočení bodů V a B
3) vzniklý úhle A´V´B´je obrazem úhlu AVB

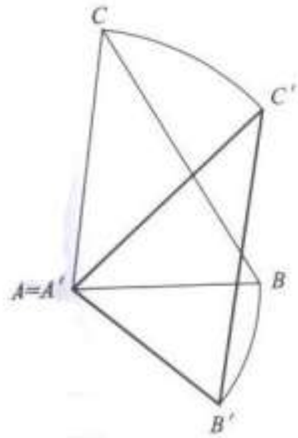


Příklad 64 : Na obrázku je otočení úhlu AVB. Určete střed otočení a smysl otáčení.



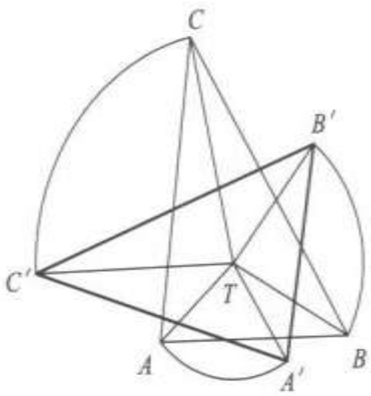
Příklad : Sestrojte v otočení určeném bodem A a úhlem -40º obraz trojúhelníka ABC.

Řešení : 1) vrchol A je samodružný
2) otočíme vrcholy B, C
3) trojúhelník A´B´C´ je obrazem trojúhelníku ABC

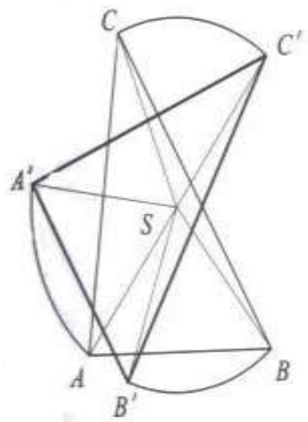


Příklad 65 : Na obrázku je otočení trojúhelníku ABC. Určete střed otočení a smysl otáčení.

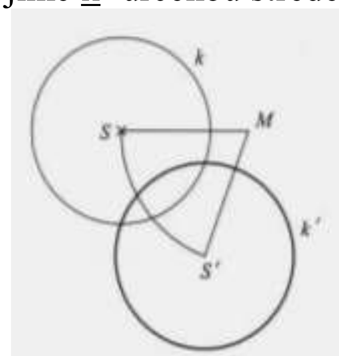
a)



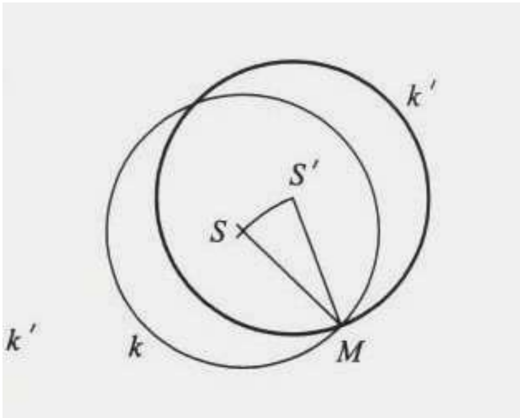
b)



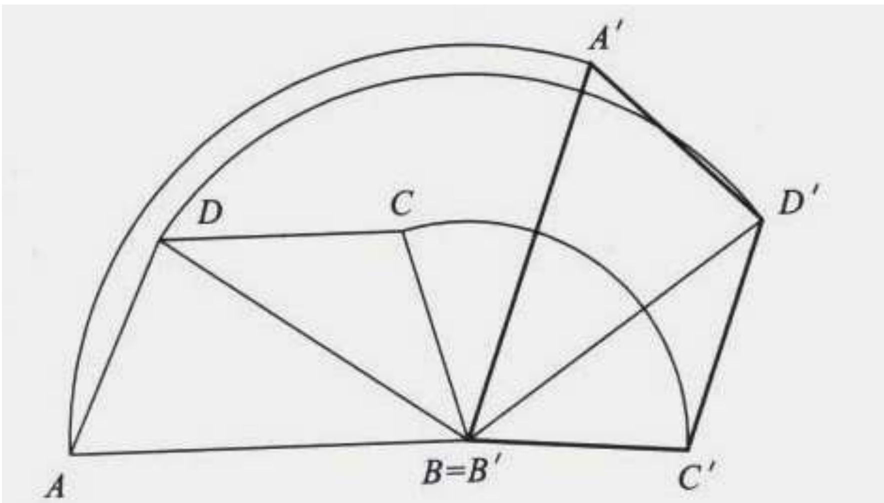
Příklad : V otočení určeném bodem M a úhlem 70º sestrojte obraz kružnice <u>k</u>.
Řešení : 1) sestrojíme obraz středu S kružnice <u>k</u>
2) sestrojíme <u>k</u>´ určenou středem S´ a stejným poloměrem jako má kružnice <u>k</u>



Příklad 66 : Na obrázku je otočení : a) kružnice <u>k</u>
b) kružnice <u>k´.</u>
Určete v obou případech střed otočení a smysl otáčení.



Příklad 67 : Na obrázku je narýsován lichoběžník ABCD.
a) Je lichoběžník A´B´C´D´ obrazem lichoběžníku ABCD ?
b) V kladném případě určete střed otáčení a smysl otáčení.



Příklad 68 : Je dán čtverec ABCD a = 5 cm. Bod S je průsečík úhlopříček čtverce.
Sestrojte kružnici <u>k</u>, která je určena bodem S a poloměrem 2 cm.
Bod X leží na polopřímce AS /AX/ = 8 cm.
Obrazec otočte : a) podle bodu A o úhel + 45º
b) podle bodu B o úhel + 90º
c) podle bodu S o úhel – 45º
d) podle bodu S o úhel + 90º
e) podle bodu X o úhel - 90º
f) podle bodu X o úhel + 180º

7.8. Skládání shodných zobrazení

Máme-li zobrazit geometrický obrazec postupně pomocí několika shodných zobrazení, tak obraz v prvním zobrazení se stává vzorem pro druhé zobrazení, obraz druhého zobrazení se stává vzorem třetímu zobrazení apod.

Příklad 69 : Je dán čtverec ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] C ≡ [-1; +1] D ≡ [-5; +1] . Dále známe body M ≡ [-3; -2] N ≡ [+1; +3] . Sestrojte obdélník v osové souměrnosti podle osy x, nově vzniklý obdélník v osové souměrnosti podle osy y a nakonec posledně vzniklý obdélník podle osy MN. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Příklad 70 : Je dán obdélník ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] C ≡ [-1; +1] D ≡ [-5; +1] . Dále známe body M ≡ [-3; -2] N ≡ [+1; +3] O ≡ [-4; +1]
Sestrojte obdélník středově souměrný podle bodu M, nově vzniklý obdélník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu N a nakonec posledně vzniklý obdélník zobrazte středově souměrný podle bodu O. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Příklad 71 : Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-7; -2] B ≡ [-1; +3] C ≡ [1; +1] .
Dále známe body K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; 0] M ≡ [+4; +4] N ≡ [+5; +5]
Sestrojte trojúhelník ABC v posunutí KL, nově vzniklý trojúhelník sestrojte v posunutí LM a posledně vzniklý trojúhelník sestrojte v posunutí MN. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Příklad 72 : Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-7; -2] B ≡ [-1; +3] C ≡ [1; +1] .
Dále známe body K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; 0] .
Sestrojte trojúhelník ABC v otočení podle bodu C a +40°, nově vzniklý trojúhelník sestrojte v otočení podle bodu K a - 90 ° a nakonec posledně vzniklý trojúhelník sestrojte v otočení podle bodu L a + 45 °. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Příklad 73 : Je dán čtverec ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; -2] M ≡ [0; 0].
Sestrojte obrazec osově souměrný podle osy x, Nově vzniklý obrazec zobrazte v posunutí KL. Posledně vzniklý obrazec zobrazte v otočení určeném bodem M a úhlem +45 °. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Příklad 74 : Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-4; -2] B ≡ [-1; +2] C ≡ [+2; +1] .
Dále známe body K ≡ [-3; -2] L ≡ [+1; 0] M ≡ [0; 0] . Sestrojte trojúhelník v osové souměrnosti podle přímky KL. Nově vzniklý trojúhelník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu M. Posledně vzniklý trojúhelník zobrazte v posunutí KM. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Souhrnná cvičení

1) Sestrojte obraz úhlu $\alpha = 100^0$ v souměrnosti se středem S, jestliže bod S leží mimo úhel alfa.

2) Je dán trojúhelník ABC, pro které platí c = 7 cm, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. Sestrojte obraz A´B´C´ trojúhelníka ABC ve středové souměrnosti se středem S, který :
a) leží uvnitř trojúhelníku ABC,
b) leží na přímce AB mezi A a B.

3) Narýsujte čtverec KLMN o straně k; k = 5 cm. Sestrojte v osové souměrnosti obraz čtverce KLMN je-li : a) osa souměrnosti totožná s přímkou KL;
b) osa souměrnosti totožná s přímkou KM;
c) osa souměrnosti má se čtvercem KLMN společný pouze bod K.

4) Označme m´obraz přímky m ve středové souměrnosti se středem O. Kdy platí m ≡ m´?

5) V pravoúhlé soustavě souřadnic vyznačte body A ≡ [-4; 3] B ≡ [2; 4]
C ≡ [3; 1] K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; 0] .Trojúhelník ABC : a) zobrazte v posunutí určeném úsečkou KL
b) zobrazte osově souměrný trojúhelník podle přímky KL

6) Narýsujte čtverec ABCD o straně délky 6 cm a průsečík jeho úhlopříček označte jako bod S. Sestrojte kružnici k (S; 3 cm). Sestrojte obraz kružnice k a čtverce ABCD ve středové souměrnosti se středem B.
7) V otočení určeném bodem U ≡ [2; 4] a úhlem - 45º zobrazte čtverec ABCD určený body A ≡ [-5; -3] C ≡ [-1; -3] .

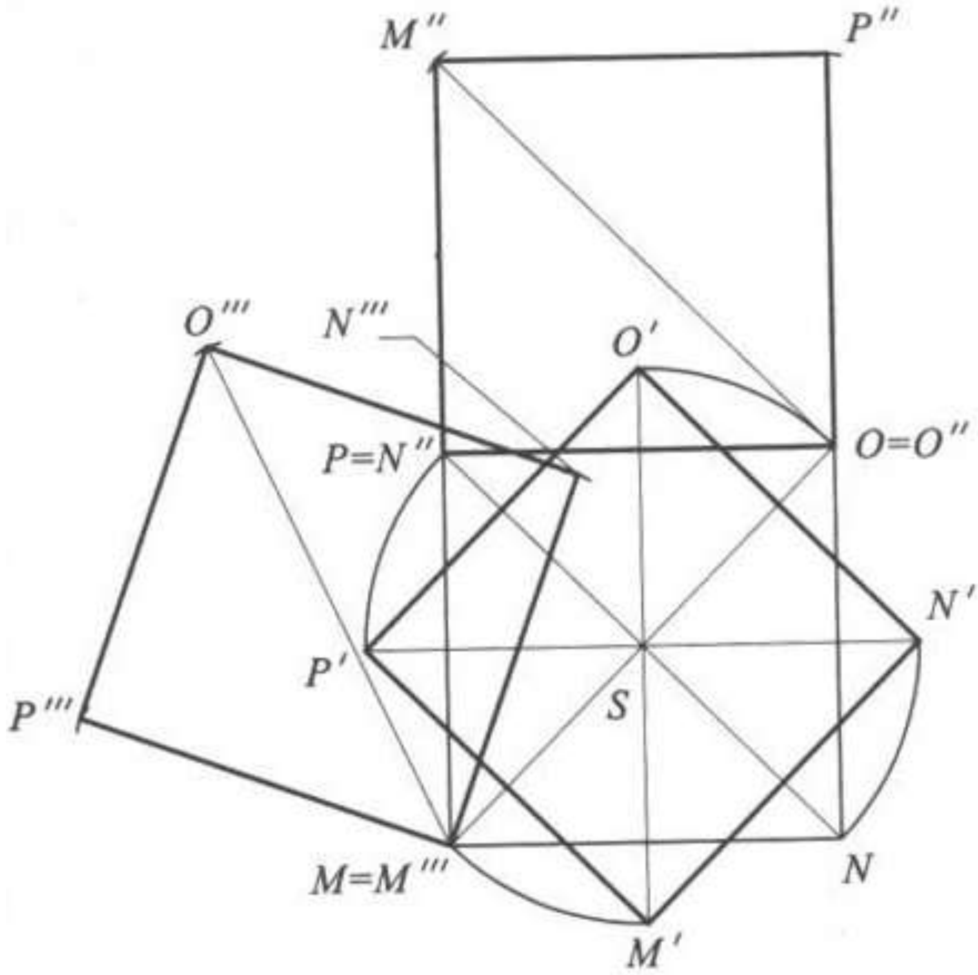
8) V pravoúhlé soustavě souřadnic vyznačte body A ≡ [4; 3] B ≡ [2; 4]
C ≡ [6; 4] Sestrojte následující body a určete jejich souřadnice: a) A´, B´, které jsou obrazy bodů A, B ve středové souměrnosti se středem S S ≡ [0; 0],
b) S´, který je obrazem bodu S v osové souměrnosti s osou AB;
c) A´´, který je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem S´.

9) Sestrojte kosodélník ABCD a jeho výšky DD‘, D D‘‘ (D‘ volte na přímce AB, D‘‘ na přímce BC). Potom sestrojte a) obraz A‘B‘C‘D‘ kosodélníku ABCD v posunutí určeném orientovanou úsečkou DD‘;
b) obraz A‘‘B‘‘C‘‘D‘‘ kosodélníku A´B´C´D´ v posunutí určeném orientovanou úsečkou DD‘‘.

10) Sestrojte libovolný obdélník ABCD. Určete posunutí, v němž průnik vzoru ABCD a jeho obrazu A‘B‘C‘D‘ v tomto posunutí bude obdélník, jehož obsah se bude rovnat jedné čtvrtině obsahu obdélníku ABCD. Směr posunutí volte rovnoběžný s přímkou a) AB, b) AD.

11) Sestrojte libovolný obdélník ABCD. Sestrojte jeho obraz v posunutí, ve kterém je obrazem bodu A bod S, který je průsečík úhlopříček obdélníku ABCD.

12) Na obrázku je vzorem čtverec MNOP. Jakým zobrazením vznikl obrazec :
a) M´N´O´P´   b) M´´ N´´ O´´ P´´   c) M´´´N´´´O´´´ P´´´



13) Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se :
a) středem A;
b) středem v bodě X, který je střed úsečky AB;
c) středem v bodě Y, který leží na polopřímce AB ve vzdálenosti o 1 cm větší než je strana c.

14) Narýsujte polopřímku PX. Sestrojte její obraz ve středové souměrnosti se středem O. Polohu bodu O volte tak, aby a) splynul s počátečním bodem polopřímky PX;
b) byl vnitřním bodem polopřímky PX;
c) byl vnitřním bodem polopřímky opačné k PX.

15) Narýsujte obdélník KLMN, jestliže strana k = 6 cm a strana l = 3 cm. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem X tak, aby X :
a) ležel na úsečce KL;
b) ležel uvnitř KLMN;
c) byl totožný s bodem K;
d) ležel mimo KLMN.

16) Sestrojte obdélník ABCD A ≡ [1;2]   B ≡ [3;5] a čtverec XYVZ
X ≡ [-1;5]   Y ≡ [2; -1]. Dále sestrojte : a) průnik obou obrazců;
b) osově souměrný obrazec vzniklého průniku podle osy x;
c) středově souměrný obrazec vzniklého podle průniku os x a y.

17) Sestrojte kružnici určenou bodem S ≡ [0; 0] s poloměrem 2 jednotky a trojúhelník ABC A ≡ [-2; 0] B ≡ [2; 0] C ≡ [0; 2] . Dále sestrojte : a) obrazec osově souměrný podle X ≡ [-1;5]   Y ≡ [2; -7] ;
b) obrazec posunutý v posunutí určené úsečkou KL K ≡ [0; 0]   L ≡ [0;7];
c) obrazec středově souměrný podle bodu M ≡ [2; 4] ;
d) obrazec v otočení určeném bodem M a úhlem + 60°.

18) Je dán pětiúhelník ABCDE) A ≡ [-5; -5]   B ≡ [-2; -7] C ≡ [0; -4]
D ≡ [0; 0] E ≡ [-3; 2]. Sestrojte : a) A´B´C´D´E´, který vznikne posunutím ABCDE určeném X ≡ [-5; -3] Y ≡ [-4; -3];
b) A´´B´´C´´D´´E´´, který vznikne rotací A´B´C´D´E´ podle bodu Z ≡ [1; 4] o úhel +10°,
c) A´´´B´´´C´´´D´´´E´´´, který vznikne osovou souměrností podle D´´E´´.

19) Jsou dána písmena : A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X. Která písmena mají : a) právě jednu osu souměrnosti;
b) právě dvě osy souměrnosti;
c) střed souměrnosti a právě jednu osu souměrnosti;
d) střed souměrnosti a právě dvě osy souměrnosti.

20) Je dán čtverec ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] C ≡ [-1; +1]
D ≡ [-5; +1] . Dále známe body M ≡ [-3; -2] N ≡ [+1; +3] . Sestrojte obdélník v osové souměrnosti podle osy x, nově vzniklý obdélník v osové souměrnosti podle osy y a nakonec posledně vzniklý obdélník podle osy MN. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

21) Je dán čtverec ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] C ≡ [-1; +1]
D ≡ [-5; +1] . Dále známe body M ≡ [-3; -2] N ≡ [-1; +1] O ≡ [0; 0] .
Sestrojte obdélník středově souměrný podle bodu M, nově vzniklý obdélník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu N a nakonec posledně vzniklý obdélník zobrazte středově souměrný podle bodu O. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

22) Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-7; -2] B ≡ [-1; +3] C ≡ [1; +1] .
Dále známe body K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; 0] M ≡ [+4; +4] N ≡ [+5; +5]
Sestrojte trojúhelník ABC v posunutí KL, nově vzniklý trojúhelník sestrojte v posunutí LM a posledně vzniklý trojúhelník sestrojte v posunutí MN. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

23) Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-7; -2] B ≡ [-1; +3] C ≡ [1; +1] .
Dále známe body K ≡ [2; -2] L ≡ [+4; 0] .

Sestrojte trojúhelník ABC v otočení podle bodu C a +40º, nově vzniklý trojúhelník sestrojte v otočení podle bodu K a - 90 º a nakonec posledně vzniklý trojúhelník sestrojte v otočení podle bodu L a + 45 º. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

24**)** Je dán čtverec ABCD A ≡ [-5; -3] B ≡ [-1; -3] K ≡ [2; -2]
L ≡ [+4; -2] M ≡ [0; 0].
Sestrojte obrazec osově souměrný podle osy x, Nově vzniklý obrazec zobrazte v posunutí KL. Posledně vzniklý obrazec zobrazte v otočení určeném bodem M a úhlem +45 º. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

25) Je dán trojúhelník ABC A ≡ [-4; -2] B ≡ [-1; +2] C ≡ [+2; +1] .
Dále známe body K ≡ [-3; -2] L ≡ [+1; 0] M ≡ [0; 0] . Sestrojte trojúhelník v osové souměrnosti podle přímky KL. Nově vzniklý trojúhelník zobrazte ve středové souměrnosti podle bodu M. Posledně vzniklý trojúhelník zobrazte v posunutí KM. Zapište souřadnice nově vzniklých obrazců.

Výsledky :

1) a) přímá shodnost - a ; h b ; c; f d ; g,
b) nepřímá shodnost - e ; f e ; c;
2) A; D;O, F; K, C;G, B;J;L, E;M, I;N ;**30)** nekonečně mnoho;
31) a) 1; b) nekonečně mnoho; c) žádnou; d) 4; e) 2; f) nekonečně mnoho;
g) nekonečně mnoho;
65) R (T; + 80º) ; b) R (S; -60º);**66) a)** R (M; -20º); **b)** R (M; +20º);**67)** R (B; -110º)

Výsledky souhrnných cvičení:

12) a) R(S;45); **b)** R(O; -90); **c)** R(M; úhel NMN´´´;
19) a) A, B, C, D, E, M, T, U, V, W; **b)** H, I, o, X; **c)** žádné písmeno;
d) X, O, I;