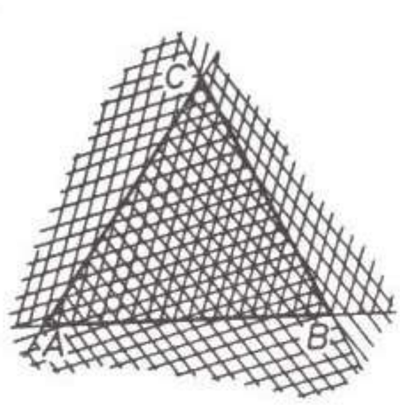
8. Trojúhelník

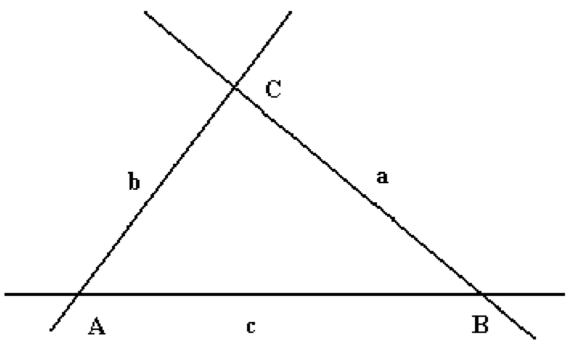
8.1. Základní pojmy

8.1.1. Trojúhelník

Máme tři různé body A, B, C. **Trojúhelník** ABC je průnik polorovin ABC, BCA a CAB.

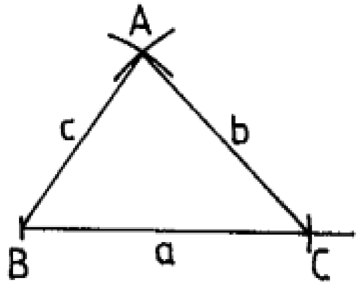


Trojúhelník popisujeme proti chodu hodinových ručiček.
Body **A, B, C** nazýváme **vrcholy** ◁ ABC.
Proti vrcholu leží stejnojmenná strana .
Úsečky *AB, BC, CA* nazýváme **strany** $\triangle ABC$;
a = | BC |, b = | AC |, c = | AB |



8.1.2. Trojúhelníková nerovnost

Z konstrukce trojúhelníka, jestliže známe všechny tři jeho strany, vyplývá důležitá zákonitost.



Bod A je průsečík kružnice určené z bodu B s poloměrem c a kružnice určené z bodu C a poloměrem b.

Aby bod A vznikl, musí platit, že součet velikostí stran b a c musí být větší než strana a. Obdobné závěry můžeme vyslovit pro bod B a C.

Tuto vlastnost trojúhelníka, že součet délek dvou stran je větší než délka strany třetí, nazýváme **trojúhelníková nerovnost.**

Pro délky stran *a, b, c* $\triangle ABC$ tedy platí tyto tři nerovnosti:

a + b > c **a + c > b** **b + c > a**

Později po zvládnutí výpočtů s absolutní hodnotou budeme uvádět tento vztah :

$$/ b - c / < a < b + c$$

Příklad 1 : Mohou tato čísla vyjadřovat velikost stran trojúhelníka v centimetrech?
a) 5; 8; 11; b) 10; 15; 19; c) 2; 6; 11; d) 6; 7; 8;

8.1.3. Členění trojúhelníků podle stran

Podle velikosti stran můžeme **rozdělit trojúhelníky** na :

a) **obecné** – všechny tři strany mají různou velikost

b) **rovnoramenné** – dvě strany mají stejnou velikost a třetí strana má jinou velikost

c) **rovnostranné** – všechny tři strany trojúhelníka mají stejnou velikost.

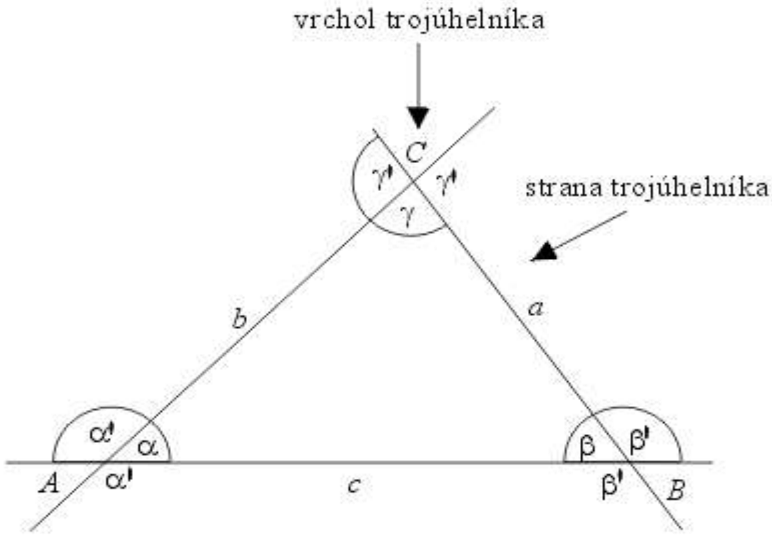
Příklad 2 : Jsou uvedená čísla v centimetrech velikosti stran trojúhelníka :
a) 4; 5; 8 b) 4; 6; 11 c) 5; 7; 12 d) 2; 2; 3; e) 4; 8;10

8.1.4. Vnitřní a vnější úhly v trojúhelníku

Úhly α, β, γ jsou **vnitřní úhly** $\triangle ABC$.

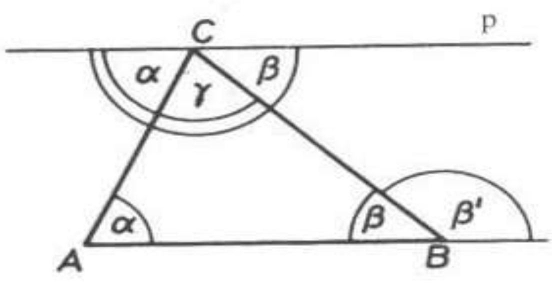
Úhly α', β', γ', jsou vedlejší úhly k vnitřním úhlům α, β, γ a nazývají se **vnější úhly** tohoto $\triangle ABC$.

Vnitřní a vnější úhel u jednoho vrcholu trojúhelníku tvoří dvojici vedlejších úhlů a proto je jejich **součet roven 180°**.



Příklad 3 : Pro velikost vnitřního úhlu platí α = 3. α'. Vypočtěte velikost vnějšího úhlu při vrcholu A.

Ukázka : Přímky AB a p jsou rovnoběžné



Úhly α jsou úhly střídavé, obdobně úhly β, to znamená, že jsou stejně veliké.
Přímý úhel při vrcholu C se skládá ze součtu úhlů $\alpha+\beta+\chi$.
Jinými slovy **součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180**°.
Součet vnitřního a vnějšího úhlů při vrcholu trojúhelníka je 180°.
$\alpha+\alpha'$ = 180° $\beta+\beta'$ = 180° $\chi+\chi'$ =180
$\alpha+\alpha'$ $+\beta+\beta'$ $+\chi+\chi'$ =180° + 180° +180° Protože $\alpha+\beta+\chi$ = 180° , pak platí
$\alpha'+\beta'+\chi'$ = 360°
Jinými slovy **součet vnějších úhlů v trojúhelníku je 360**°.

Z výše uvedených vztahů vyplývá, že **velikost jednoho vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí zbývajících vnitřních úhlů daného trojúhelníka.**

Příklad 4 : Vypočítejte zbývající vnitřní a vnější úhly trojúhelníka ABC :

a) $\alpha = 60^\circ$ $\beta' = 100^\circ$
b) $\chi = 90^\circ$ $\beta = 45^\circ$
c) $\beta' = 86^\circ$ $\chi = 12^\circ$
d) $\alpha' = 100^\circ$ $\beta' = 170^\circ$
e) $\alpha = 50^\circ$ $\chi' = 100^\circ$
f) $\alpha = 97^\circ$ $\beta = 99^\circ$
g) $\beta = 43^\circ\, 30'$ $\chi = 38^\circ\, 12'$
h) $\beta = 53^\circ\, 42'$ $\alpha' = 128^\circ\, 42'$
i) $\alpha = 27^\circ\, 41'$ $\beta' = 127^\circ\, 43'$
j) $\alpha = 15^\circ\, 48'$ $\beta' = 141^\circ\, 39'$

V trojúhelníku platí další vztah, který si zatím nebudeme dokazovat :
Proti větší straně leží větší vnitřní úhel, proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strana.

Příklad 5 : Vypočtěte velikosti vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníka ABC víme-li , že :

a) poměr vnitřních úhlů je 2 : 3 : 5
b) poměr vnějších úhlů je 5 : 7 : 8
c) vnitřní úhly mají velikost α; 2. α; 6. α
d) vnější úhly mají velikost 5. β; β;14. β
e) α = 2. β a χ = 3. β

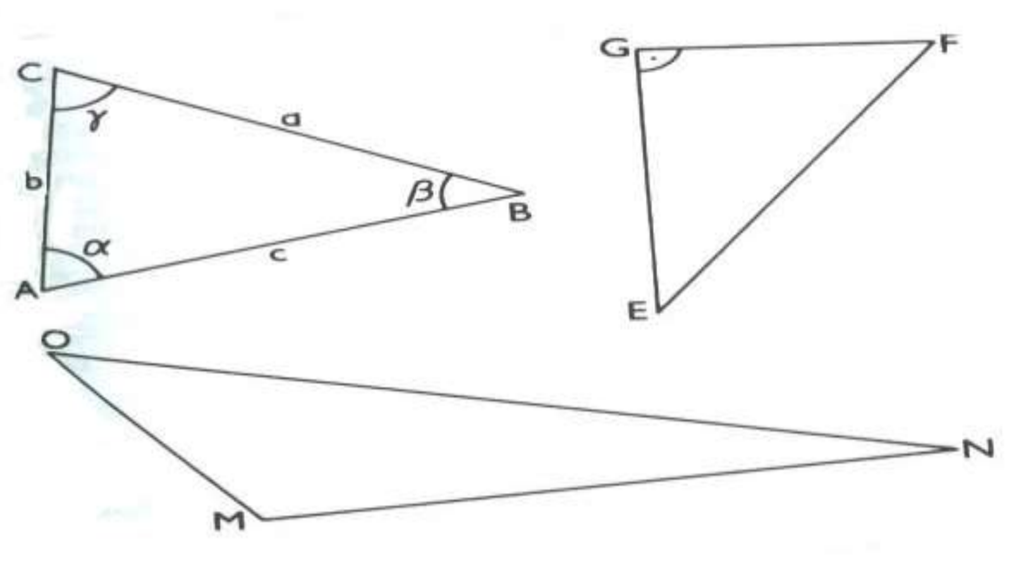
8.1.5. členění trojúhelníků podle úhlů

Podle velikosti vnitřních úhlů můžeme **rozdělit trojúhelníka** na :

a) ostroúhlé – všechny tři vnitřní úhly jsou ostré (tj. jejich velikost je menší než 90°) - na obrázku ΔABC

b) **pravoúhlé** – právě jeden vnitřní úhel je pravý (tj. jeho velikost je 90°) – na obrázku ΔEFG

c) **tupoúhlé** – právě jeden vnitřní úhel je tupý (tj. jeho velikost je větší než 90°) – na obrázku ΔMNO



Příklad 6: Jak nazýváme trojúhelník, který má velikosti vnitřních úhlů :

a) 122°; 45°; 13°
b) 90°; 45°; 45°
c) 72°; 75°; 33°
d) 22°; 145°; 13°
e) 80°; 50°; 50°
f) 25°; 45°; 110°
g) 60°; 60°; 60°;

Příklad 7 : V trojúhelníku ABC platí, že $\chi > \alpha + \beta$. Je tento trojúhelník:

a) ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý
b) jaký vztah mezi velikostmi vnitřních úhlů musí platit, aby trojúhelník byl pravoúhlý
c) jaký vztah mezi velikostmi vnitřních úhlů musí platit, aby trojúhelník byl ostroúhlý?

Příklad 8 : Narýsujte libovolný trojúhelník KLM. Graficky sečtěte velikosti:

a) vnitřních úhlů trojúhelníka KLM
b) vnějších úhlů trojúhelníka KLM.

8.2. Rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník

Rovnoramenný trojúhelník je takový trojúhelník, který má stejně veliké dvě strany a třetí strana má jinou velikost.

Stejně veliké strany nazýváme **ramena.**
Třetí stranu nazýváme **základna**.
Vrchol proti základně označujeme jako **hlavní vrchol**.
Vnitřní úhel u hlavního vrcholu označujeme jako **úhel u hlavního vrcholu**.

Rameno trojúhelníka svírá se základnou úhel, který označujeme jako **úhel při základně**.
Úhly při základně mají stejnou velikost (jsou shodné).
Výška na základnu, těžnice procházející hlavním vrcholem, osa hlavního vrcholu a osa základny jsou totožné. Tato přímka půlí úhel při hlavním vrcholu.

Trojúhelník je osově souměrný podle výšky na základnu.

Rovnostranný trojúhelník je takový trojúhelník, který má všechny tři strany stejně veliké (jsou shodné).

Všechny tři vnitřní úhly mají 60° a vnější úhly mají 120°.
Příslušné osy stran, osy úhlů, těžnice a výšky jsou totožné.

Střed kružnice opsané a vepsané a těžiště trojúhelníka jsou totožné body.

Příklad 9 : Může být rovnoramenný trojúhelník:

a) ostroúhlý
b) pravoúhlý
c) tupoúhlý ?

Příklad 10 : Může být rovnostranný trojúhelník:
a) ostroúhlý b) pravoúhlý c) tupoúhlý ?

Příklad 11 : Vypočtěte obvod rovnoramenného trojúhelníka :
a) je-li základna a = 5 cm a rameno b = 7 cm;
b) je-li a = 7,4 cm b = 5,1 cm.

Příklad 12 : Rovnostranný trojúhelník má obvod 15,6 cm. Vypočtěte:
a) velikost strany trojúhelníka
b) velikost úhlů trojúhelníka.

Příklad 13 : Obvod rovnoramenného trojúhelníka má 42,5 cm. Jedna jeho strana měří 18,3 cm. Vypočtěte velikost zbývajících stran trojúhelníka.

Příklad 14 : Vypočtěte:
a) úhel při základně, jestliže úhel při hlavním vrcholu měří 49º 28´
b) úhel při hlavním vrcholu, jestliže úhel při základně měří 27º 31´ .

Příklad 15 : Vnější úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je dvojnásobek velikosti úhlu při hlavním vrcholu. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka.

Příklad 16 : Vypočtěte velikost vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníka.

Příklad 17 : Uvnitř čtverce KLMN je rovnostranný trojúhelník KLS. Vypočtěte velikost úhlu SKN.

Příklad 18 :V rovnoramenném trojúhelníku ABC úhel $\alpha = 50^0$. Vypočtěte zbývající vnitřní úhly trojúhelníka.

8.3. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Osa vnitřního úhlu trojúhelníka je přímka, která prochází vrcholem úhlu a rozděluje úhel na dva stejně veliké úhly.

Průsečík os úhlů trojúhelníka je jeden bod a leží u každého trojúhelníka uvnitř trojúhelníka.

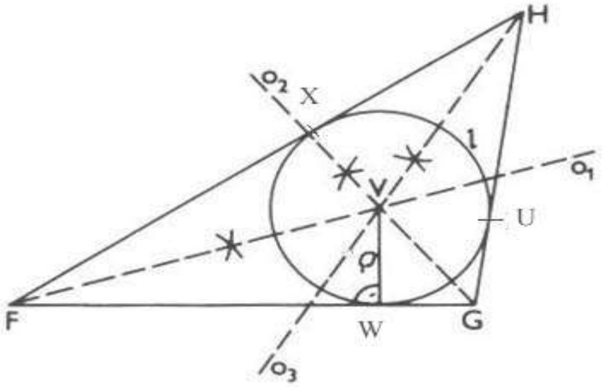
Průsečík os úhlů trojúhelníka je **střed kružnice vepsané trojúhelníku**.

Kružnice vepsaná trojúhelníku má s každou stranou trojúhelníka pouze **jeden společný bod.**

U každého trojúhelníka existuje pouze jedna úsečka o velikosti poloměru vepsané kružnice, která je kolmá na danou stranu trojúhelníka. Jeden její koncový bod je střed kružnice vepsané a druhý koncový bod je průsečík této úsečky a dané strany trojúhelníka. Tento průsečík je také společný bod dané strany a kružnice vepsané. Jinými slovy: jedná se o bod dotyku kružnice vepsané se stranou trojúhelníka.
Dříve než narýsujeme kružnici vepsanou danému trojúhelníku, musíme narýsovat tyto body dotyku s jednotlivými stranami trojúhelníka.

Příklad : Sestrojte libovolný trojúhelník FGH a vepište mu kružnici l.

Řešení : 1) sestrojíme trojúhelník FGH
2) sestrojíme osy vnitřních úhlů trojúhelníka
3) průsečík os o_1, o_2, o_3 označíme jako bod V
4) najdeme body dotyku vepsané kružnice se stranami trojúhelníka – bod dotyku je průsečík strany trojúhelníka s kolmicí na tuto stranu, která prochází průsečíkem os úhlů – body U; W; X
5) sestrojíme vepsanou kružnici, která je určena středem v bodě V a poloměrem VU (VW; VX)



Příklad 19 : Narýsujte:
a) libovolný ostroúhlý trojúhelník
b) libovolný pravoúhlý trojúhelník
c) libovolný tupoúhlý trojúhelník
a vepište mu kružnici.

Osa strany trojúhelníka je kolmá přímka, která prochází středem strany trojúhelníka.

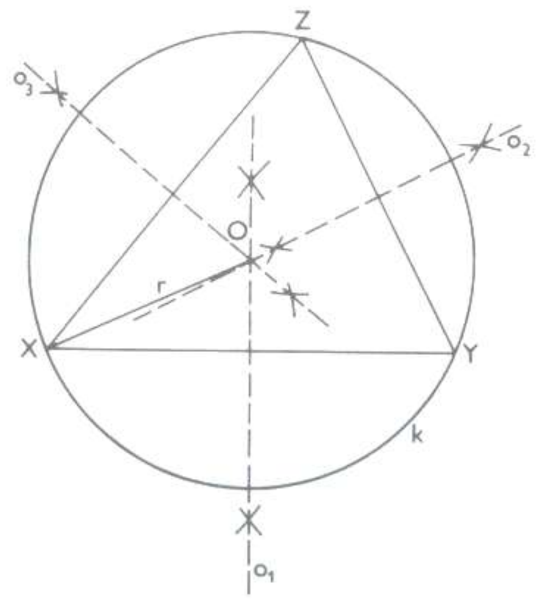
Střed strany trojúhelníka značíme písmenem, jehož vrcholem strana trojúhelníka neprochází a připisujeme index 1.
Střed strany BC označujeme A_1.

Osy stran trojúhelníka je protínají v jednom bodě.
Průsečík os stran je **střed kružnice opsané trojúhelníku**.

Kružnice opsaná trojúhelníka prochází pouze vrcholy daného trojúhelníka.

Pravoúhlý trojúhelník má střed kružnice opsané totožný se středem nejdelší strany (přepony).

Příklad: Sestrojte kružnici k, která je kružnicí opsaná trojúhelníku XYZ.
Řešení: 1) sestrojíme trojúhelník XYZ;
2) sestrojíme osy stran trojúhelníka o_1, o_2, o_3;
3) průsečík os označíme jako bod O;
4) sestrojíme opsanou kružnici k, která je určena průsečíkem os stran a poloměrem OX (OY; OZ).



Příklad 20: Narýsujte: a) libovolný ostroúhlý trojúhelník
b) libovolný pravoúhlý trojúhelník
c) libovolný tupoúhlý trojúhelník
a opište mu kružnici.

Příklad 21 : Narýsujte kružnici k, která je určena středem S a poloměrem 5 cm. Na kružnici určete jeden bod A. Z nekonečně mnoha pravoúhlých trojúhelníků ABC s pravým vrcholem při vrcholu A vyberte jeden a narýsujte tento trojúhelník. Trojúhelníku ABC vepište kružnici l.

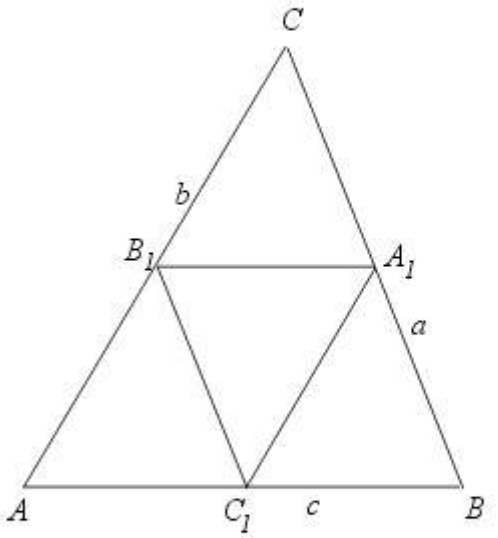
Příklad 22 : a) Zvolte tři různé body A, B a C, které neleží v přímce. Narýsujte kružnici m, která prochází body A, B a C.
b) Zvolte tři různoběžné přímky p, q, r, Narýsujte kružnici k, která se dotýká všech třech přímek.

Příklad 23: Narýsujte kružnici k , která je určena bodem S a poloměrem 5 cm. Dále narýsujte bod A, pro který platí /SA/ = 3 cm. Sestrojte trojúhelník KLM, kterému je kružnice k opsaná a strana KL prochází bodem A. Kolik existuje trojúhelníků daných vlastností ?

8.4. Střední příčky trojúhelníka

Střední příčka trojúhelníka je úsečka, která spojuje dva středy stran trojúhelníka.

Střední příčka trojúhelníka je **rovnoběžná** s jednou stranou trojúhelníka.
Střední příčka trojúhelníka má **poloviční velikost strany,** se kterou je rovnoběžná.



Opakem příkladu, kdy rýsujeme střední příčky trojúhelníku, je příklad, kdy máme narýsovaný libovolný trojúhelník ABC a tomuto trojúhelníku máme narýsovat trojúhelník XYZ, který bude mít za střední příčky strany trojúhelníka ABC.

Příklad 24 : Narýsujte střední příčky u libovolného : a) ostroúhlého trojúhelníka
b) pravoúhlého trojúhelníka
c) tupoúhlého trojúhelníka.

Příklad 25: Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí : A_1B_1 = 4 cm,
B_1C_1 = 6 cm A_1C_1 = 7 cm. Dále u tohoto trojúhelníka narýsujte :
a) střední příčky
b) kružnici opsanou
c) kružnici vepsanou.

Příklad 26 : Obvod trojúhelníka $A_1B_1C_1$, který je tvořen středními příčkami trojúhelníka ABC, je 42,7 cm. Vypočtěte obvod trojúhelníka ABC.

Příklad 27 : Obvod trojúhelníka $A_1B_1C_1$, který je tvořen stejně velkými středními příčkami trojúhelníka ABC, měří 7,5 cm . Narýsujte :
a) trojúhelník ABC
b) opište a vepište trojúhelníku ABC kružnici.

8.5. Výšky v trojúhelníku

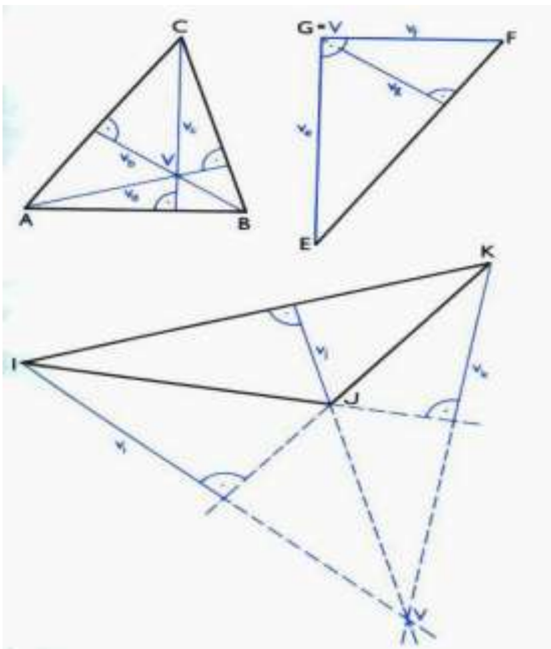
Pata výšky je průsečík kolmice procházející vrcholem trojúhelníka na stranu trojúhelníka, která tímto vrcholem neprochází.

Patu výšky označujeme podle vrcholu, kterým prochází a přiřazujeme index $_0$.

Výška trojúhelníka je úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníka s patou dané výšky.

Každý trojúhelník má tři výšky. Přímky, na kterých tyto výšky leží, se protínají v jediném bodě *V*, který se nazývá **průsečík výšek**. Jeho poloha vzhledem k trojúhelníku závisí na druhu trojúhelníku:

v pravoúhlém trojúhelníku splývá bod V s vrcholem u pravého úhlu
v ostroúhlém trojúhelníku je bod V jeho vnitřním bodem
v tupoúhlém trojúhelníku leží bod V mimo trojúhelník.



Příklad 28 : Sestrojte trojúhelník ABC a = 6 cm, b = 7 cm, c = 8 cm.
U trojúhelníka narýsujte :
a) střední příčky
b) výšky
c) opište kružnici trojúhelníku
d) vepište kružnici trojúhelníku.

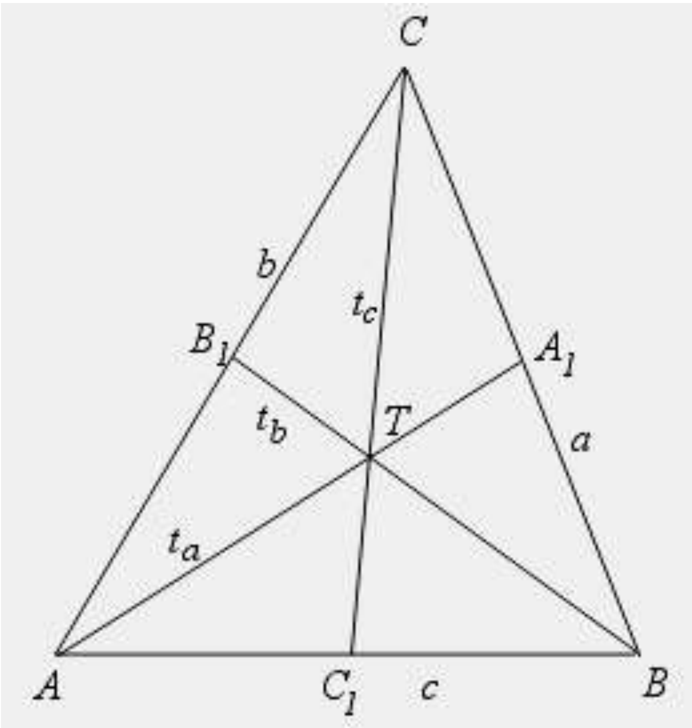
Příklad 29 : Existuje trojúhelník, který má dvě navzájem kolmé výšky ?

8.6. Těžnice v trojúhelníku

Těžnice trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem strany, která neprochází tímto vrcholem.

Těžnici značíme písmenem t s indexem podle vrcholu, kterým prochází.
Například t_a, t_b, t_c.

Každý trojúhelník má tři těžnice, které se protínají v jediném bodě *T*. Tento bod nazýváme **těžiště trojúhelníku**. Těžiště dělí těžnici na dvě části, a to tak, že delší část obsahuje vrchol a je dvakrát delší než kratší část .



/ AT/ : / TA_1 / = 2 : 1 / BT/ : / TB_1 / = 2 : 1 / CT/ : / TC_1 / = 2 : 1

Příklad 30 : Sestrojte trojúhelník ABC a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm. Narýsujte:
a) střední příčky
b) výšky
c) opište kružnici trojúhelníku
d) vepište kružnici trojúhelníku
e) těžnice trojúhelníka.

Příklad 31 : Je dán trojúhelník ABC, kde T je těžiště trojúhelníka. Víme, že

$a = 6$ cm, $b = 7{,}8$ cm $c = 8$ cm, $t_a = 7{,}2$ cm t_b 6 cm $t_c = 5{,}7$ cm. Vypočtěte obvod trojúhelníka :

a) ABT
b) BCT
c) AC_1C
d) AC_1T
e) ABC
f) CB_1B
g) CB_1T
h) $A_1B_1C_1$

Příklad 32 : V trojúhelníku KLM platí, že $t_m = 18{,}6$ cm. Kolik měří :

a) úsečka t_k
b) úsečka TM
c) úsečkaTM_1.

Příklad 33 : Jsou dány tři různé body A; B; T, které neleží v přímce. Sestrojte trojúhelník ABC, kde bod T bude těžiště.

Příklad 34 : Je dána úsečka / KK_1 / = 6,3 cm a bod T, který leží na KK_1, a platí, že / KT / = 4,2 cm. Mimo přímku KK_1 leží bod L. Sestrojte trojúhelník KLM, aby bod T byl těžištěm trojúhelníka KLM.

Příklad 35 : Narýsujte kružnici k, která je určena středem S a poloměrem 5 cm. Narýsujte jeden z mnoha trojúhelníků ABC, kterému je kružnice k opsanou kružnicí a který má pouze dvě strany stejně veliké. Narýsujte u trojúhelníka ABC:

a) těžiště
b) střední příčku A_1B_1
c) kružnici vepsanou
d) výšku na stranu c
e) patu kolmice A_0.

8.7. Obvod a obsah trojúhelníka

Obvod trojúhelníka vypočítáme, jestliže sečteme všechny strany trojúhelníka.

$$\boxed{O = a + b + c}$$

Obsah trojúhelníka vypočítáme, jestliže součin strany a příslušné výšky vydělíme dvěmi.

$$\boxed{S = \frac{a.v_a}{2}}$$

Tento vztah platí obdobně pro stranu b a c.

U pravoúhlého trojúhelníka výška na odvěsnu je totožná s druhou odvěsnou. proto pro pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a a b platí vztah $\boxed{S = \frac{a.b}{2}}$

Pro obsah trojúhelníka platí další vztahy :

$\boxed{S = \frac{a.b.c}{4r}}$, kde a, b, c, jsou velikosti stran , r je velikost poloměru kružnice opsané

$\boxed{S = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2}}$, kde a, b, c, jsou velikosti stran, ρ je velikost poloměru kružnice vepsané

Později se naučíme ještě Heronův vzorec a vzorec pomocí goniometrické funkce.

Příklad 36 : Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC je-li :

a) a = 7cm b = 5 cm v_a = 4 cm
b) a = 4 cm c = 5 cm v_c = 8 cm
c) a = 5 cm b = 7 cm v_c = 5 cm
d) a = 4 cm c = 7 cm v_c = 6 cm

Příklad 37 : Vypočtěte obvod trojúhelníku ABC je-li :

a) a = 7cm b = 5 cm c = 4 cm
b) a = 4 cm c = 5 cm b = 8 cm
c) a = 5 cm b = 7 cm c = 5 cm
d) a = 4 cm c = 7 cm b = 6 cm

Příklad 38 : Vypočtěte zbývající údaje :

a) a = 7 cm b = 8 cm O = 20 cm (c)
b) a = 5 cm S = 40 cm^2 (v_a)
c) S = 100 cm^2 v_b = 10 cm (b)
d) b = 8 cm c = 12 cm O = 25 cm (a)
e) S = 80 cm^2 v_a = 8 cm , v_b = 10 cm c = 19 cm (O)

Příklad 39 : Vypočtěte zbývající údaje :

a) a = 4 cm b = 5 cm v_a = 5 cm v_c = 8cm (S; c; v_b; O; r; ρ)
b) a = 3 cm O = 12 cm v_a = 4 cm v_b = 3cm (c; b; v_c; S; r; ρ)
c) v_b = 8 cm b = 6 cm c = 10 cm ρ = 2 cm (O; r; S; a; v_c; v_a)

Příklad 40 : Vypočtěte obvod rovnostranného trojúhelníka ABC je-li /A_1B_1/ = 5cm ;.

8.8. Shodnost trojúhelníků

Věty o shodnosti trojúhelníků :

- Vsss : Jestliže příslušné dvojice stran dvou trojúhelníků jsou shodné, pak oba trojúhelníky jsou shodné,
- Vsus : Jestliže dva trojúhelníky se shodují ve dvou dvojicích příslušných stran a v úhlu těmito stranami sevřenými, pak jsou trojúhelníky shodné.
- Vusu : Jestliže dva trojúhelníky se shodují v jedné dvojici příslušných stran a v úhlech k těmto stranám příslušných, pak jsou tyto trojúhelníky shodné

Věty o shodnosti trojúhelníků platí také v obrácené podobě :

- Vsss : Jestliže dva trojúhelníky jsou shodné, pak příslušné dvojice stran trojúhelníků jsou shodné.
- Vsus : Jestliže dva trojúhelníky jsou shodné, pak se shodují ve dvou příslušných dvojicích stran a úhlu těmito stranami sevřenými.
- Vusu : Jestliže dva trojúhelníky jsou shodné, pak se shodují v jedné dvojici příslušných stran a v úhlech k těmto stranám přilehlých.

Příklad 41 : Najděte shodné dvojice trojúhelníků, shodnost zapište a určete větu podle které jsou shodné.
a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm,
d = 8 cm, e = 7 cm, f = 4 cm,
g = 5 cm, h = 4 cm, i = 7 cm,
j = 8 cm, k = 4 cm, l = 7 cm,
m = 1 cm, n = 4 cm, o = 4 cm,
p = 7 cm, r = 4 cm, s = 9 cm.

Příklad 42: Najděte shodné dvojice trojúhelníků, shodnost zapište a určete větu podle které jsou shodné.
a = 4 cm, b = 5 cm, /∠ ACB/ = 40º,
d = 4 cm, e = 5 cm, /∠ DFE/ = 40º,
g = 4 cm, h = 5 cm, /∠ GHI/ = 40º,
j = 4 cm, k = 5 cm, /∠ LKJ/ = 40º,
m = 4 cm, n = 5 cm, /∠ ONM/ = 40º,
p = 5 cm, r = 5 cm, /∠ PQR/ = 40º.

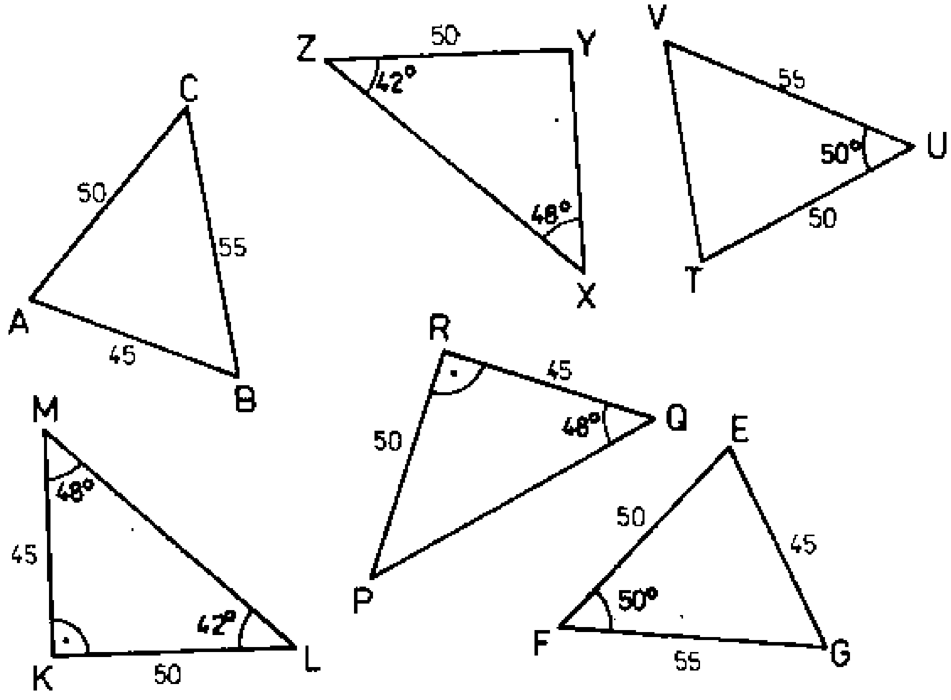
Příklad 43 : Najděte shodné dvojice trojúhelníků, shodnost zapište a určete větu podle které jsou shodné.
a = 4 cm, /∠ ACB/ = 40º, /∠ ABC/ = 60º,
e = 4cm, /∠ EDF/ = 40º, /∠ EFD/ = 60º,
g = 4cm, /∠ GHI/ = 40º, /∠ HGI/ = 80º,
j = 4 cm /∠ JKL/ = 60º, /∠ JLK/ = 40º,
m = 5cm /∠ MNO/ = 40º, /∠ NOM/ = 60º,

Příklad 44 : Jestliže platí ◃ ABC ≅ ◃ ACB ≅ ◃ CAB, co platí pro strany a úhly trojúhelníka ?

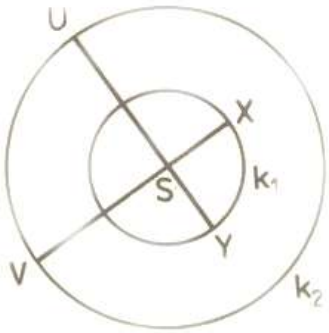
Příklad 45 : Je dána přímka AB A ≠ B. Narýsujte přímku p, která je osou úsečky AB. Označte S střed úsečky AB. Na přímce p zvolte bod X různý od bodu S. Podle jaké věty platí, že ◃ AXS ≅ ◃ BXS ?

Příklad 46 : Úsečky AB a CD se protínají v bodě S, který je jejich společným středem. Jsou úsečky AC a BD shodné ?

Příklad 47 : Na obrázku vyhledejte shodné trojúhelníky a shodnost zapište .



Příklad 48 : Kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné kružnice. Dokažte, že UX $\cong$ VY.



Příklad 49 : Přímka FH je osou ostrého úhlu EFG. EF $\cong$ GF. Jsou trojúhelníky FHE a FHG shodné ?

Příklad 50 : Narýsujte libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník A´B´C´, který je středově souměrný s trojúhelníkem ABC podle bodu C. Dokažte shodnost trojúhelníků ABC a A´B´C´.

Příklad 51 : Je dán kosočtverec ABCD. Bod X je průsečík AB s kolmicí z bodu D na stranu AB, bod Y je průsečík BC s kolmicí z bodu D na stranu BC. Dokažte, že Trojúhelník AXD je shodný s trojúhelníkem CYD.

8.9. Konstrukce trojúhelníka

Konstrukce obrazce je **konstruktivní úloha.**

Každá konstruktivní úloha se skládá ze :**a) zápisu úlohy**

b) náčrtku

c) rozboru

d) postupu konstrukce

e) konstrukce

f) důkazu

g) diskuze.

Účelem **zápisu úlohy** je seznámit nás se zadáním příkladu.

Náčrtek provádíme jako bychom již měli úlohu vyřešenu, barevně vyznačíme zadané údaje a pomocí nich úlohu řešíme.
Při **rozboru** píšeme které veličiny budeme hledat a současně uvedeme množiny, jejichž průnikem vznikne hledaná veličina.

Postupem konstrukce rozumíme postup jednotlivých kroků při konstrukci.

Při **důkazu** musíme ukázat, že narýsovaný obraze splňuje všechny požadavky zadání příkladu.

Při **diskuzi** uvažujeme na jakých veličinách záleží počet řešení a určujeme tento počet. Situaci, která nastala při našem zadání, zdůrazníme. Počet řešení uvádíme vždy v jedné polorovině.

V různých učebnicích se můžeme setkat s obdobným členěním, popřípadě obdobnými názvy.

Při konstrukci trojúhelníka potřebujeme znát tři údaje.

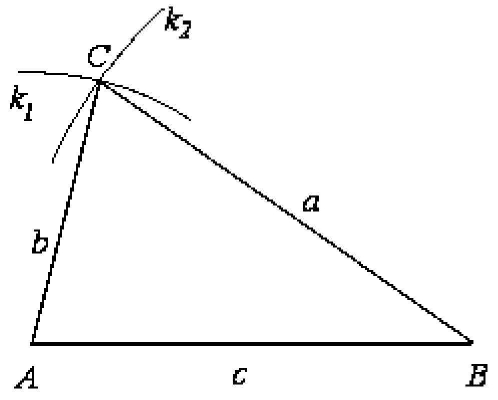
Základní typy konstrukce :
známe všechny tři strany ……..věta strana, strana, strana **V sss**
známe stranu a úhly přilehlé k této straně … věta úhel, strana, úhel **V usu**
známe dvě strany a úhel, které tyto strany svírají věta strana, úhel, strana **V sus**

Při dalších typech příkladů konstrukce trojúhelníka budeme navzájem kombinovat především tyto veličiny : strana, úhel, výška, těžnice, střední příčka, poloměr kružnice opsané – r, poloměr kružnice vepsané – g.

Příklad : Sestrojte trojúhelník ABC, známe-li a = 4 cm, b = 5 cm, c = 6 cm.

Řešení: a) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 6 cm.

b) náčrtek:

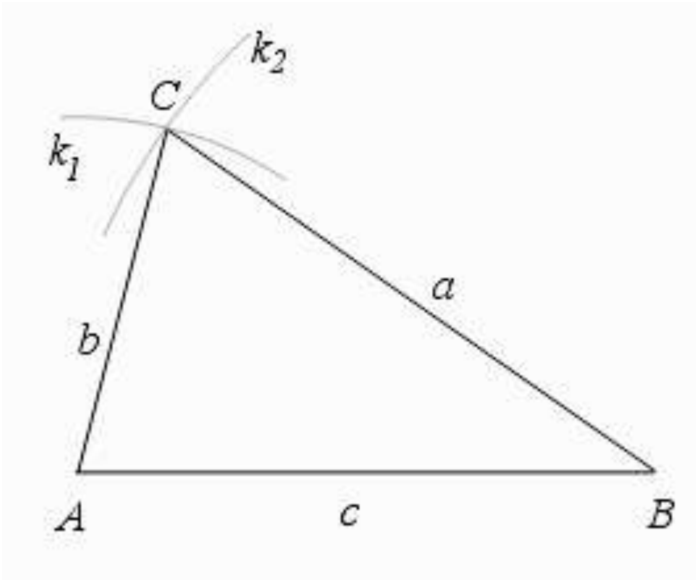


c) rozbor C .... $k_1 \equiv$ (A; 5 cm)
$k_2 \equiv$ (B; 4 cm)
Vsss

d) postup konstrukce:

1) AB; / AB / = 6 cm
2) $k_1 \equiv$ (A; 5 cm)
3) $k_2 \equiv$ (B; 4 cm)
4) $k_1 \cap k_2 \equiv C$
5) ΔABC

e) konstrukce



f) Narýsovaný obrazec odpovídá zadání.

g) **Platí-li trojúhelníková nerovnost ………………jedno řešení v jedné polorovině**

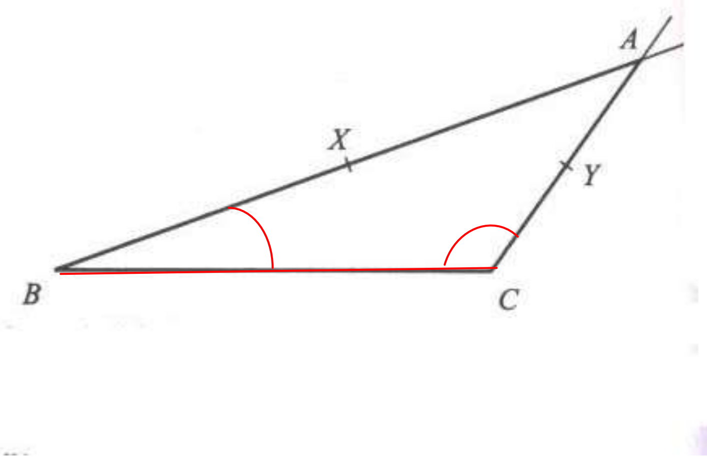
Neplatí-li trojúhelníková nerovnost ……………žádné řešení

Příklad : Sestrojte trojúhelník ABC, známe-li a = 5 cm , ∠ABC = 30º, ∠BCA = 130º.

Řešení :

a) a = 5 cm ∠ABC = 30º ∠BCA = 130º

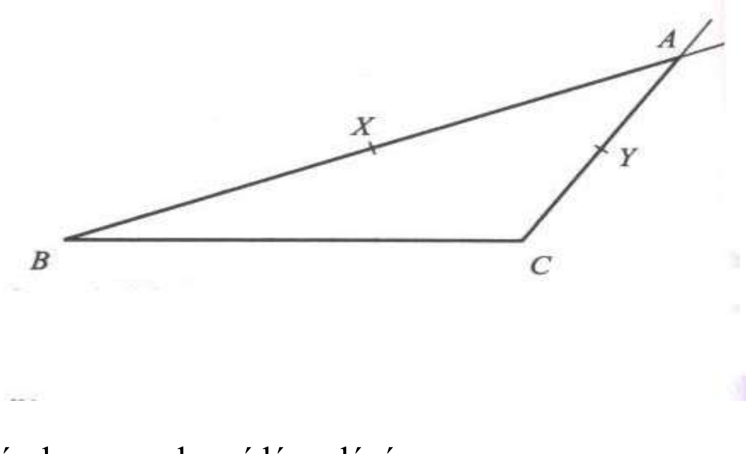
b)



c) A ……/ ∠XBC / = 30º
/ ∠BCY / = 130º
Vusu

d) 1) BC; / BC / = 5 cm
2) ∠XBC; / ∠XBC / = 30º
3) ∠BCY; / ∠BCY / = 130º
4) → BX ∩ → CY ≡ A

e)



f) Narýsovaný obrazec odpovídá zadání.

g)/ **∠ABC / + / ∠BCA / < 180º …………………… jedno řešení v jedné polorovině**
/∠ABC / + / ∠BCA / ≥ 180º …………………… žádné řešení

Příklad 52 : Sestrojte trojúhelník ABC známe-li a = 5 cm b = 6 cm $\chi = 60^{o}$.

Známe-li stranu trojúhelníka a jeho příslušnou výšku, pak jeho třetí vrchol leží na rovnoběžné přímce s danou stranou ve vzdálenosti dané výšky.

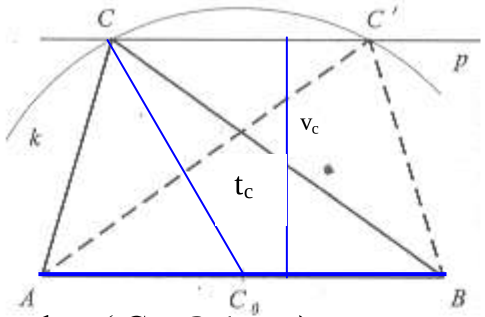
Známe-li stranu trojúhelníka a příslušnou výšku, pak jeho třetí vrchol leží na kružnici určené středem dané strany a poloměrem o velikosti příslušné těžnice.

Známe-li stranu trojúhelníka a poloměr opsané kružnice, pak nejdříve rýsujeme střed kružnice opsané, který je totožný s průsečíky kružnic určenými ve známých vrcholech trojúhelníka a poloměrem kružnice opsané. Třetí vrchol trojúhelníka leží na kružnici opsané.

Příklad : Sestrojte trojúhelník ABC známe-li c = 5 cm, t_c = 3,4 cm, v_c = 3 cm

a) c = 5 cm, t_c = 3,4 cm, v_c = 3 cm

b)

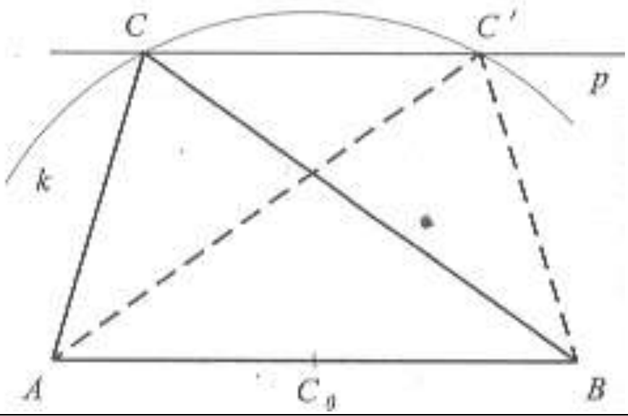


c) C ….. k ≡ (C_0 ; 3,4 cm)

p // AB ve vzdálenosti 3 cm

d) 1) AB; / AB / = 5 cm
2) k ≡ (C_0 ; 3,4 cm)
3) p // AB ve vzdálenosti 3 cm
4) k $\cap$ p ≡ C
5) $\triangle$ ABC

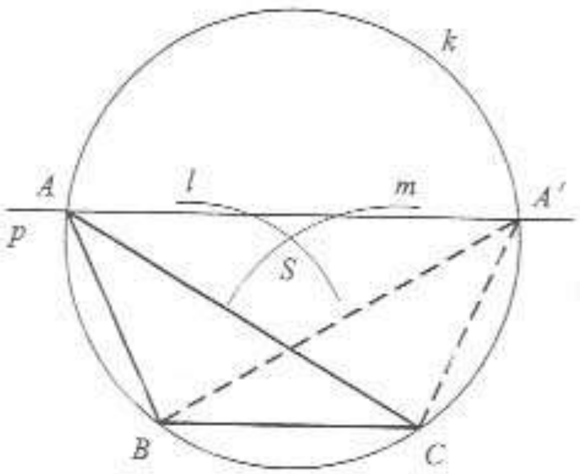
e)



f) Narýsovaný obrazec odpovídá zadání.

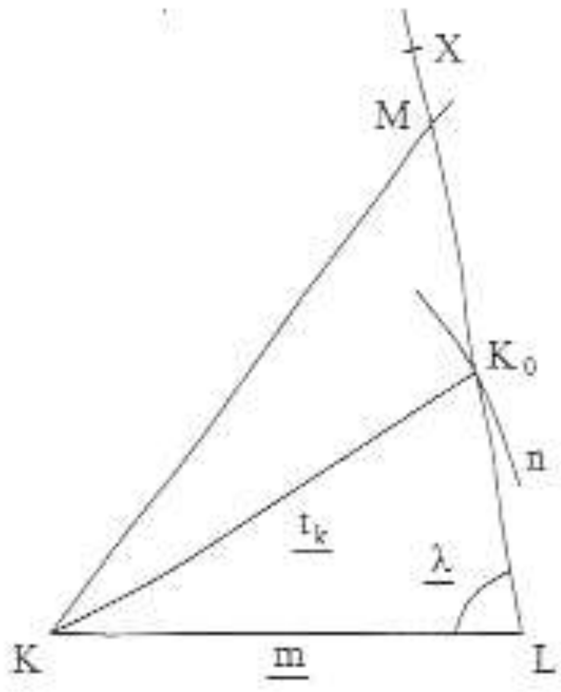
g) **$t_c > v_c$ …………………………………….. dvě řešení v jedné polorovině**
$t_c = v_c$ ……………………………………… jedno řešení
$t_c < v_c$ ………………………………………žádné řešení

Příklad : Sestrojte trojúhelník ABC známe-li, a = 6 cm v_a = 5 cm r = 4 cm
Nápověda :



Příklad : Sestrojte trojúhelník KLM známe-li, m = 8cm, | ∠KLM | =60°,
t_k = 10 cm

Nápověda :



Příklad 53 : Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno :

a) a, b, c,
b) a, b, α,
c) a, b, γ,
d) a, b, v_a,
e) a, b, t_a,
f) a, b, r,
g) a, α, β,
h) a, β, γ,
i) a, β, v_a,
j) a, β, t_a,
k) a, β, t_c,
l) a, β, r,
m) a, v_a, t_a,
n) a, v_a, r,
o) a, t_a, t_b,
p) a, t_b, t_c

Souhrnná cvičení

1) Základna rovnoramenného trojúhelníku má délku 8,7 cm a rameno má délku 5,2 cm.
a) zjistěte, zda-li takový trojúhelník může existovat
b) vypočtěte jeho obvod
c) narýsujte tento trojúhelník
d) graficky ověřte, že vnitřní úhly při základně jsou shodné
e) graficky ověřte, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý.

2) Obvod rovnoramenného trojúhelníku je 1,2 m.Vypočtěte zbývající strany trojúhelníka, má-li:
a) základnu délky 38 cm
b) základnu délky 50 cm
c) rameno délku 50 cm
d) rameno délku 60 cm

3) Známe jeden úhel v rovnoramenném trojúhelníku. Vypočítej velikosti zbývajících vnitřních úhlů, je-li :
a) $\alpha = 36°$,
b) $\beta = 123° 60'$
c) $\alpha = 21° 56' 14''$

4) Určete zda-li uvedené úhly jsou vnitřními úhly trojúhelníka:
a) 36°,123°, 60°
b) 18°, 123°, 39°
c) $21^0 56'$, $63^0 14'$, $94^0 50'$
d) 39°05', 78°45', 63°10'
e) 35°10', 84°20', 60°30'

5) Rozhodněte, zda-li dané úsečky mohou být stranami trojúhelníka:
a) 18 cm, 16 cm, 30 cm ,
b) 4,2 m, 6,8 m, 2,6 m
c) 36 mm, 2,7 cm, 68 mm
d) 0,42 m, 12 dm, 85 cm

6) Narýsujte rovnostranný trojúhelník, jestliže jeho obvod je 14, 4 cm. Sestrojte jeho:
a) těžnice
b) střední příčky
c) osy stran
d) osy úhlů
e) výšky
f) kružnici vepsanou
g) kružnici opsanou.

7) Sestroj trojúhelník, známe-li :
a) a = 6,5 cm b = 5 cm c = 8 cm
b) k = 4,5 cm, l = 64 mm, m = 0,58 dm
c) b = 7,5 cm, a = 6 cm, c = 52 mm
d) a = 4,6 cm, b= 6 cm a obvod trojúhelníku o = 15,8 cm.

8) Narýsujte rovnoramenný trojúhelník, jestliže :
a) jeho základna měří 8,2 a obvod trojúhelníka 19,8 cm
b) úhel při základně měří 78° a základna je dlouhá 5 cm
c) úhel při hlavním vrcholu má 52° a rameno 4,5 cm
d) úhel při hlavním vrcholu má 78° a základna 7 cm
e) úhel při hlavním vrcholu má 80° a úhel při základně 55°
f) úhel při hlavním vrcholu má 80° a úhel při základně 50°.

9) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC:
a) s odvěsnami AC=BC, jestliže b=5cm
b) s přeponou a = 6 cm, $|\angle ABC| = 45°$
c) s odvěsnou c = 6 cm, $|\angle ABC| = 45°$
d) $|\angle ABC| = 45°$, $|\angle BCA| = 45°$
e) a = 4 cm, b = 6 cm, $\gamma = 90°$.

10) Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, je-li a = 8,5 cm. Dále narýsujte :
a) patu výšky v_a
b) výšku v_c
c) střední příčku, která je rovnoběžná se stranou b
d) střední příčku, která má velikost poloviny strany b
e) těžiště
f) kružnici vepsanou.
g) kružnici opsanou.

11) Zjistěte, zda modrý klín na naší vlajce je rovnoramenný nebo rovnostranný trojúhelník. Zvolte délku strany a = 3 cm a vlajku narýsujte platí-li, že její strany jsou v poměru 2:3 a klín vznikne tak, že vedeme úhlopříčky v obdélníku vlajky.

12) Seřaďte vzestupně podle velikosti úhly v trojúhelníku ABC, je-li :
a) a = 5 cm, b = 8 cm, c = 9cm;
b) a = 6 cm, b = 4 cm, c = 5 cm
c) a = 4 cm, b = 4 cm, c = 6 cm
d) a = 5 cm, b = 5 cm, c = 5 cm
e) a = 12 cm, b = 5 cm, c = 8 cm
f) a = 5 cm, b = 7 cm, c = 6 cm

13) Seřaďte sestupně strany trojúhelníka ABC je-li :
a) $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$
b) $\beta = 65°$, $\chi = 40°$
c) $\alpha = 40°$, $\beta = 40°$
d) $\chi = 75°$, $\alpha = 50°$
e) $\beta = 100°$, $\chi = 40°$
f) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

14) Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Rozhodněte, zda mají jeho vnitřní úhly při základně velikost větší než 60°, jestliže :
a) a = 8 cm, c = 6 cm
b) b = 6 cm, c = 8 cm
c) c = 8 cm, v_c = 4 cm
d) b = 4 cm, v_b = 4 cm
e) a = 5 cm, v_a = 4 cm.

Výsledky příkladů:

1) a) ano; **b)** ano; **c)** ne; **d)** ano;**2)** a)ano; b) ne;c)ne;d)ano; e) ano;**3)** $\alpha = 45°$;
4) a) $\alpha' = 120°$ $\beta = 80°$ $\gamma = 40°$ $\gamma' = 140°$;
b) $\alpha = 45°$ $\alpha' = 135°$ β' 135° $\gamma' = 90°$;

c) α = 74° α' = 106° β = 94° γ' = 168°;
d) α = 80° β = 10° γ = 90° γ' = 90°;
e) α' = 150° β = 50° β' = 130° γ = 80°;
f) trojúhelník nemůže existovat;
g) α = 98°18′ α' = 81°42′ β' = 136°30′ γ' = 141°48′;
h) α = 51°18′ β' = 126°18′ γ = 75° γ'= 105°;
i) α'= 152° 19′ β = 52° 17′ γ = 100° 2′ γ' = 79° 58′;
j) α'= 164° 12′ β = 38° 21′ γ = 125° 51′ γ' = 54° 9′;
5) a) vnitřní úhly 36° 54° 90° vnější úhly 144° 126° 90°;
b) vnitřní úhly 90° 54° 36° vnější úhly 90° 126° 144° ;
c) vnitřní úhly 20° 40° 120° vnější úhly 160° 140° 60° ;
d) trojúhelník neexistuje ;e) vnitřní úhly 60° 30 90° vnější úhly 120° 150° 90°;
6) a) tupoúhlý; b) pravoúhlý rovnoramenný; c) ostroúhlý; d) tupoúhlý;
e) rovnoramenný; f) tupoúhlý ; g) rovnostranný;
7) a) je tupoúhlý; **b)** součet dvou vnitřních úhlů se rovná třetímu vnitřnímu úhlu; **c)** součet dvou menších úhlů je větší než třetí úhel;
8) a) 180°; b) 360°;**9)** a) ano; b) ano; c) ano;**10)** a) ano; b) ne c) ne
11) a) 19 cm; **b)** 19,9 cm nebo 17,6 cm – obě čísla jsou správná a nutná řešení;
12) a) 5,2 cm; b) 60° ;**13)** 5,9 cm nebo 12,1 cm – obě čísla jsou správná a nutná řešení;
14) a) 65°16′; **b)** 124°58′;**15)** 60° ; trojúhelník je rovnostranný;**16)** 120° ;**17)** 30° ;
18) β = 50^0, χ = 80^0 nebo β = 65^0 , χ = 65^0;**23)** nekonečně mnoho;**26)** 85,4 cm;
29) ano, například pravoúhlý trojúhelník;
31) a) 16,8 cm; b) 13,8 cm; c) 17,5 cm; d) 10,7 cm; e) 21,8 cm; f) 15,9 cm;
g) 9,7 cm; h) 10,9 cm;
32) a)nemůžeme určit;b) 12,4 cm; c)6,2 cm;**36)** a)14 cm^2;b)20 cm^2;c) nejde;d)21 cm^2 ;
37) a) 16 cm; b) 17 cm; c) 17 cm; d) 17 cm;
38) a) a = 5 cm; b)v_a = 16 cm;c)b = 20 cm;d) a = 5 cm; e) O = 55 cm;
39) a) S = 10 cm^2 ; c= 2,5 cm; ρ = 1,74 cm; v_b = 4 cm; r = 1,2 cm; O = 11,5 cm;
b) c = 5 cm; b = 4 cm; v_c = 2,4 cm; S = 6 cm^2 ; r = 2,5 cm; ρ = 1 cm;
c) O = 24 cm; r = 5 cm; S = 24 cm^2 ; ρ = 2 cm; a = 8 cm; v_c = 4,8 cm;
40) a) 30 cm.**41)** $\triangleleft$ABC $\cong$ $\triangleleft$HGI Vsss; $\triangleleft$DEF $\cong$ $\triangleleft$JLK Vsss;**42)** $\triangleleft$ABC $\cong$DEF V sus;
43) $\triangleleft$ABC $\cong$ $\triangleleft$EFD $\cong$ $\triangleleft$GIH $\cong$ $\triangleleft$JKL Vusu;
47) $\triangleleft$ABC $\cong$ $\triangleleft$EGF Vsss; $\triangleleft$EFG $\cong$ $\triangleleft$TUV Vsus; $\triangleleft$PQR $\cong$ $\triangleleft$LMK Vsus;
$\triangleleft$PQR $\cong$ $\triangleleft$ZXY Vusu; $\triangleleft$LMK $\cong$ $\triangleleft$ZXY Vusu;

Výsledky souhrnných cvičení :

1) b) 19,1 cm; **2) a)** 41 cm, 41 cm; **b)** 35 cm; **c)** 20 cm; **d)** nemá řešení; **4) a)** ne; **b)** ano; **c)** ne; **d)** ne; **e)** ano; **12)** a) α, β χ;b) β, χ, α; c) $\alpha=\beta$, χ;d) $\alpha=\beta=\chi$;e) β, χ, α; f) α, χ, β;
13) a) b, c, a; b) a, b, c; c) c, a=b; d) c, b, a, e) b, c, a; f) a = b = c;

14) a) ano; b) ne; c) ne; d) ne; e) ano.