3. Mocnina a odmocnina. Pythagorova věta

3.1. Mocnina

3.1.1. Vymezení pojmu

Součin stejných činitelů můžeme napsat v podobě mocniny.
Například : součin **2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2** můžeme psát také jako mocninu $\mathbf{2^7}$
$\mathbf{a \cdot a = a^2}$………součin dvou čísel………druhá mocnina čísla a

Obecný zápis mocniny : $\boldsymbol{a^n}$………… $a \in R$, $n \in R$ (R – množina reálných čísel) **a** je základ mocniny **n** je mocnitel(určuje počet činitelů v součtu)

Mocnina přirozeného čísla je vždy číslo přirozené

Příklad 1 : Vyjádřete jako mocninu : a) 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2
b) (-3). (-3). (-3). (-3). (-3). (-3).

Příklad 2 : Vyjádřete jako součin mocnin : a) 3.3.3.3.a.a.a.a.b.b.b.b
b) 4.5.a .b

3.1.2. Druhá mocnina

Druhá mocnina nenulového reálného čísla je vždy kladné reálné číslo.

Zpaměti musíme umět :

$0^2 = 0$	$6^2 = 36$	$12^2 = 144$	$18^2 = 324$
$1^2 = 1$	$7^2 = 49$	$13^2 = 169$	$19^2 = 361$
$2^2 = 4$	$8^2 = 64$	$14^2 = 196$	$20^2 = 400$
$3^2 = 9$	$9^2 = 81$	$15^2 = 225$	$21^2 = 441$
$4^2 = 16$	$10^2 = 100$	$16^2 = 256$	$22^2 = 484$
$5^2 = 25$	$11^2 = 121$	$17^2 = 289$	$25^2 = 625$

$100^2 = 10\,000$ $1\,000^2 = 1\,000\,000$ $10\,000^2 = 100\,000\,000$
$0{,}1^2 = 0{,}01$ $0{,}01^2 = 0{,}0001$ $0{,}001^2 = 0{,}000\,001$

Obdobně : $(-2)^2 = 4$ $(-7)^2 = 49$ $(-10)^2 = 100$ $(-0{,}01)^2 = 0{,}0001$

Výpočet druhé mocniny budeme provádět :
a) zpaměti (pokud budeme umět);- musíme znát všechny způsoby -
b) pomocí tabulek;
c) pomocí kalkulačky

Výpočty mocnin pomocí rozkladu :

$80^2 = (8 . 10)^2 = 64 . 100 = 6\,400$

$25\,000^2 =(25 . 1\,000)^2 = 625 . 1\,000\,000 = 625\,000\,000$

$(-50)^2 = [(-1) . 5 . 10]^2 = 1 . 25 . 100 = 2\,500$

$0{,}7^2 = (7 . 0{,}1)^2 = 49 . 0{,}01 = 0{,}49$

$0{,}11^2 = (11 . 0{,}01)^2 = 121 . 0{,}0001 = 0{,}0121$

$(- 0{,}005)^2 = [(-1) . 5 . 0{,}001]^2 = 1 . 25 . 0{,}000001 = 0{,}000\,025$

$(\frac{3}{4})^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

$45^2 = (9 . 5)^2 = 81 . 25 = 2\,025$

Příklad 3 : Vypočtěte .

a) $40^2 =$
b) $700^2 =$
c) $9\,000^2 =$
d) $12\,000^2 =$
e) $160\,000^2 =$
f) $(- 200)^2 =$
g) $(- 1\,900)^2 =$
h) $0{,}13^2 =$
i) $0{,}013^2 =$
j) $0{,}0014^2 =$
k) $(-0{,}18)^2 =$
l) $(\frac{3}{7})^2 =$
m) $(-\frac{11}{15})^2 =$
n) $(3\frac{1}{2})^2 =$
o) $(- 4\frac{2}{3})^2 =$
p) $72^2 =$
r) $54^2 =$
s) $1{,}6^2 =$
t) $2{,}5^2 =$

Určování druhých mocnin pomocí tabulek a kalkulačky

Příklad 4 : Určete pomocí tabulek :

a) $57^2 =$
b) $256^2 =$
c) $1\,723^2 =$
d) $0{,}29^2 =$
e) $8{,}43^2 =$
f) $0{,}00388^2 =$
g) $294\,000^2 =$
h) $175\,469^2 =$
i) $-5{,}02^2 =$
j) $18{,}6^2 =$

Příklad 5 : Vypočítejte :

a) $70^2 + 7^2 + 0{,}7^2 =$
b) $13^2 – 1{,}3^2 – 0{,}13^2 =$
c) $5 - 3^2 =$
d) $7^2 + 4^2 – 0{,}4^2 =$
e) $(7 – 5)^2 . 2^2 =$
f) $0{,}4^2 + 3 . 0{,}4^2 =$
g) $4^2 : (-2)^2 =$
h) $0{,}1^2 – (3{,}4 – 1{,}2^2)^2 =$
i) $3^2 - \frac{4^2}{5} =$
j) $0{,}8 -1{,}1^2 . 0{,}3^2 =$

3.1.3. Třetí mocnina

Zpaměti musíme umět :

$0^3 = 0$ $1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$

$5^3 = 125$ $10^3 = 1\,000$ $100^3 = 1\,000\,000$

$1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$ $0{,}1^3 = 0{,}001$

$0{,}01^3 = 0{,}000001$ $0{,}001^3 = 0{,}000000001$

Výpočty mocnin pomocí rozkladu :

$80^3 = (8 . 10)^3 = 512 . 1 000 = 512 000$

$25 000^3 =(25 . 1 000)^3 = 25^3 . 1 000 000 000 = 15 625 000 000 000$

$0,7^3 = (7 . 0,1)^3 = 343 . 0,001 = 0,343$

$0,11^3 = (11 . 0,01)^3 = 1 331 . 0, 000001 = 0,001331$

$(\frac{3}{4})^3 = (\frac{3^3}{4^3}) = \frac{27}{64}$

$45^3 = (9 . 5)^3 = 729 . 125 = 91 125$

$(-50)^3 = [(-1) . 5 . 10]^3 = -1 . 125 . 1 000 = - 125 000$

$(- 0,005)^3 = [(-1) . 5 . 0,001]^3 = - 1 . 125 . 0,000000001 = - 0,000000125$

Lichá mocnina záporného čísla je vždy záporné číslo.

Příklad 6 : Určete pomocí tabulek :

a) $57^3 =$
b) $256^3 =$
c) $1 723^3 =$
d) $0,29^3 =$
e) $8,43^3 =$
f) $0,00388^3 =$
g) $294 000^3 =$
h) $-5,02^3 =$
i) $18,6^3 =$

Příklad 7 : Vypočítejte :

a) $70^3 + 7^3 + 0,7^3 =$
b) $13^3 – 1,3^3 – 0,13^3 =$
c) $5 – 3^3 =$
d) $7^3 + 4^3 – 0,4^3 =$
e) $(7 – 5)^3 . 2^3 =$
f) $0,4^3 + 3 . 0,4^3 =$
g) $4^3 : (-2)^3 =$
h) $0,1^3 – (3,4 – 1,2^3)^3 =$
i) $0,8 -1,1^3 . 0,3^3 =$

3.1.4. N-tá mocnina

$0^n = 0$ pro nenulové číslo n

$a^0=1$ nenulové číslo umocněné číslem nula je vždy 1;

$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ pro $a \neq 0$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $(-4)^{-2} = \frac{1}{16}$ $2^{-4} = \frac{1}{16}$ $(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2 = 1\frac{7}{9}$

$0,3^{-4} = (\frac{3}{10})^{-4} = (\frac{10}{3})^4 = \frac{10000}{81} = 123\frac{37}{81}$

Příklad 8 : Vypočítejte :

a) $6^{-2} =$
b) $5^{-3} =$
c) $10^{-4} =$
d) $1,5^{-2} =$
e) $(\frac{2}{3})^{-3} =$
f) $(\frac{4}{5})^{-2} =$
g) $(2\frac{2}{3})^{-3} =$
h) $(1\frac{2}{5})^{-3} =$
i) $(-3\frac{1}{2})^{-2} =$
j) $(-\frac{3}{5})^{-2} =$
k) $-(-\frac{3}{5})^{-2} =$
l) $(- 3)^3 =$
m) $– (-2)^4 =$
n) $–(-2)^5 =$
o) $– (- 2)^{-5} =$

Příklad 9 : Vypočítejte :

a) $1{,}7^2 =$
b) $1\,900^2 =$
c) $0{,}25^2 =$
d) $0{,}0017^2 =$
e) 800^2
f) $0{,}14^2 =$
g) $3^5 =$
h) $(-1{,}3)^2 =$
ch) $-0{,}2^5 =$ i) $-(-2)^4 =$

j) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$
k) $\left(-\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}\right)^3 =$
l) $-\{-[(-2)^2]^2\}^3 =$
m) $4^{-2} =$
n) $0{,}4^{-2} =$

o) $\frac{1}{4^{-2}} =$
p) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}} =$
r) $\frac{4^{-2}}{\frac{1}{4^{-3}}} =$
s) $0^0 =$

Příklad 10 : Porovnejte :

a) $(-2)^2 \quad -2^2$ b) $(-3)^3 \quad -3^3$ c) $-1^7 \quad -(1)^7$

Příklad 11 : Vypočítejte :

a) $5{,}2 \cdot 10^5 + 5{,}2 \cdot 10^4 - 2{,}4 \cdot 10^3 - 2{,}4 \cdot 10^2 + 1{,}8 \cdot 10 - 5;$
b) $2{,}7 \cdot 10^9 - 5{,}7 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 - 3{,}2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 1;$

Příklad 12 : Vypočtěte :

a) $3^{-2} + 0{,}4^2 =$
b) $0{,}5^{-2} + 0{,}4^{-3} + 0{,}2^2 =$
c) $0^3 - (-1{,}7)^2 =$

3.1.5. Mocnina mocniny

$(x^a)^b = x^{ab}$ $(3^2)^4 = 3^8$

Příklad : Vyjádřete jako součin (podíl) mocnin s co nejmenším přirozeným základem mocniny $\frac{4^3 . 3^6 . 25^{-2} . 5^3}{2^7 . 9^3}$

Řešení : $\frac{4^3 . 3^6 . 25^{-2} . 5^3}{2^7 . 9^3} = \frac{2^6 . 3^6 . 5^3}{2^7 . 3^6 . 5^4} = \frac{1}{2.5}$

Příklad 13 : Vyjádřete jako součin (podíl) mocnin s co nejmenším přirozeným základem mocniny :

a) $\frac{8.9^3}{16^4}$
b) $\frac{27^4}{25^2} . \frac{50^2 . 32^{-2}}{81^5}$
c) $\frac{20^{-4}}{25^{-2}} . \frac{2^7}{8^{-3}} . 0{,}8^2 =$
d) $\frac{24.8^{-3}.15^5.45^3}{12^3.50^4.16^2} =$
e) $\frac{12^3.49^{-2}.14^2}{32^5.6^{-3}.9^2} =$
f) $\frac{14^3.25^{-2}.12^3}{27^2.49^2.3^4} =$

3.2. Odmocnina

3.2.1. Druhá odmocnina zpaměti

Druhá odmocnina čísla : $\sqrt{\mathbf{a}}$, kde a je nezáporné číslo

Neexistuje odmocnina záporného čísla, protože neexistuje číslo, které když vynásobíme stejným číslem, abychom dostali záporné číslo.

Zpaměti musíme umět :

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{400}=20$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{625}=25$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{1000}=10.\sqrt{10}$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{10000}=100$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{100000}=100.\sqrt{10}$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{1000000}=1\,000$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{0{,}01}=0{,}1$
$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{0{,}0001}=0{,}01$
$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{0{,}000001}=0{,}001$
$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{361}=19$	

Výpočty odmocnin pomocí rozkladu

$\sqrt{25600}=\sqrt{256.100}=16\,.\,10=160$

$\sqrt{0{,}49}=\sqrt{49}\,.\,\sqrt{0{,}01}=7\,.\,0{,}1=\mathbf{0{,}7}$

$\sqrt{0{,}0361}=\sqrt{361}\,.\,\sqrt{0{,}0001}=19\,.\,0{,}01=\mathbf{0{,}19}$

$\sqrt{0{,}000324}=\sqrt{0{,}000001.324}=0{,}001\,.\,18=0{,}018$

$\sqrt{3{,}61}=\sqrt{361.0{,}01}=19\,.\,0{,}1=1{,}9$

$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{8}=\sqrt{2}\,.2.\,\sqrt{2}=2\,.\,2=4$

$\sqrt{50}=\sqrt{25.2}=\sqrt{25}\,.\,\sqrt{2}=5.\,\sqrt{2}$

Příklad 14 : Vypočtěte :

a) $\sqrt{0{,}0144}=$

b) $\sqrt{200}=$

c) $\sqrt{9000000}=$

d) $\sqrt{0{,}0361}=$

e) $\sqrt{6{,}25}=$

f) $\dfrac{\sqrt{1600}}{20^2}=$

g) $\dfrac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{0{,}16}}$

h) $\sqrt{(12)^2}=$

i) $\sqrt{-900}=$

j) $\sqrt{490000}=$

k) $\sqrt{6250000}=$

l) $\sqrt{1600000000\mathbf{0}0}=$

m) $\sqrt{0{,}49}=$

n) $\sqrt{2{,}56}=$

o) $\sqrt{0{,}0144}=$

p) $\sqrt{0{,}0256}=$

r) $\sqrt{0{,}000009}=$

s) $\sqrt{2{,}25}=$

t) $\sqrt{500}$

Příklad 15 : Vypočtěte :

a) $\sqrt{144}+\sqrt{36}=$

b) $\sqrt{169}+\sqrt{100}-\sqrt{81}=$

c) $\sqrt{16}+\sqrt{81}=$

d) $13+\sqrt{36}=$

e) $\sqrt{900}\,.\,\sqrt{10000}=$

f) $\sqrt{4}-\sqrt{9}\,.\,\sqrt{2500}=$

g) $\sqrt{0{,}49}-100-\sqrt{64}=$

h) $\sqrt{400}+\sqrt{144}$

i) $\sqrt{36100}-\sqrt{200}=$

j) $\sqrt{(12)^2}+\sqrt{0{,}0144}=$

k) $\sqrt{0{,}0361}-\sqrt{9000000}=$

Příklad 16 : Vypočítejte :

a) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} =$ d) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} =$ g) $\dfrac{\sqrt{0{,}0009}}{\sqrt{0{,}0064}} =$

b) $\sqrt{\dfrac{225}{16}} =$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{196}} =$ h) $\sqrt{3\dfrac{78}{121}} =$

c) $\sqrt{\dfrac{64}{25}} =$ f) $\sqrt{\dfrac{0{,}0121}{0{,}16}} =$ i) $\dfrac{\sqrt{1600}}{20^2} + \dfrac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{0{,}16}} =$

Pro práci s tabulkami :

$\sqrt{781{,}7} = \sqrt{782} =$ **27,96**

$\sqrt{0{,}00587} = \sqrt{58{,}7} \,.\, \sqrt{0{,}0001} = \sqrt{59}\,.0{,}01 = 7{,}68.0{,}01 =$ **0,0768**

Příklad 17 : Vypočtěte pomocí tabulek :

a) $\sqrt{8{,}65} =$ h) $\sqrt{11{,}69} =$ o) $\sqrt{0{,}157} =$

b) $\sqrt{5{,}68} =$ i) $\sqrt{112{,}4} =$ p) $\sqrt{67000} =$

c) $\sqrt{0{,}000765} =$ j) $\sqrt{32000} =$ r) $\sqrt{7{,}21} =$

d) $\sqrt{2772} =$ k) $\sqrt{5{,}73} =$ s) $\sqrt{4{,}2} =$

e) $\sqrt{0{,}154} =$ l) $\sqrt{3{,}5} =$ t) $\sqrt{449{,}71} =$

f) $\sqrt{4{,}09} =$ m) $\sqrt{156{,}21} =$ u) $\sqrt{8000000} =$

g) $\sqrt{7265} =$ n) $\sqrt{70000000} =$ v) $\sqrt{0{,}297} =$

Příklad 18 : Vypočítejte, pokud možno bez tabulek :

a) $\sqrt{289}\,.\,\sqrt{256}\,.\,\sqrt{225} =$

b) $\sqrt{361}\,.\,\sqrt{441}\,.\,\sqrt{121} =$

c) $\sqrt{0{,}04}\,.\,\sqrt{1{,}44}\,.\,\sqrt{2025} =$

d) $\sqrt{0{,}09}\,.\,\sqrt{1{,}96}\,.\,\sqrt{3025} =$

e) $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{8}\,.\,\sqrt{10} =$

f) $0{,}1.\sqrt{75+6} + 5.\sqrt{0{,}000529} + 0{,}2^2 =$

g) $2^2 .(\sqrt{4{,}41} - \sqrt{2{,}56}) - 3.\sqrt{1{,}69 - 1{,}44} =$

h) $3^2 - 2.(\sqrt{5{,}29} - \sqrt{3{,}24}) + 0{,}25^2 =$

i) $5^2 .4(\sqrt{7{,}29} - \sqrt{4{,}84}) - 3{,}25^2 =$

j) $5^2 .\sqrt{4^2 .0{,}1296} - 5{,}4^2 =$

k) $2.\,[\,\sqrt{3{,}5^2 - 2{,}1^2} - \sqrt{3{,}5 - 2{,}12^{\,2}}\,] - \sqrt{8.18} =$

3.2.2. Výpočet druhé odmocniny pomocí kalkulačky nebo tabulek

Odhad druhé odmocniny

Příklad 19 : Odhadněte odmocninu a potom ji vypočítejte pomocí kalkulačky :

a) $\sqrt{8{,}65} =$ f) $\sqrt{4{,}09} =$ k) $\sqrt{5{,}73} =$

b) $\sqrt{5{,}68} =$ g) $\sqrt{7265} =$ l) $\sqrt{3{,}5} =$

c) $\sqrt{0{,}000765} =$ h) $\sqrt{11{,}69} =$ m) $\sqrt{156{,}21} =$

d) $\sqrt{2772} =$ i) $\sqrt{112{,}4} =$ n) $\sqrt{70000000} =$

e) $\sqrt{0{,}154} =$ j) $\sqrt{32000} =$ o) $\sqrt{0{,}157} =$

p) $\sqrt{67000}=$
r) $\sqrt{7{,}21}=$
s) $\sqrt{4{,}2}=$
t) $\sqrt{449{,}71}=$
u) $\sqrt{80000000}=$
v) $\sqrt{0{,}297}=$
w) $\sqrt{20000}=$
z) $\sqrt{96251}=$

3.2.3. Třetí odmocnina

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2.2.2}=2$ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3.3.3}=\mathbf{3}$ $\sqrt[3]{64}=\mathbf{4}$

Příklad 20 : Vypočtěte :

a) $\sqrt[3]{2^3}=$
b) $\sqrt{\sqrt{81}}=$
c) $\sqrt{\sqrt{16}}=$
d) $\sqrt{4.\sqrt{16}}=$
e) $\sqrt{a^6}=$
f) $\sqrt{\sqrt{a^4}}=$
g) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}=$
h) $\sqrt{-\sqrt{a^2}}=$
ch) $\sqrt{\sqrt{1}}=$

3.3. Mocnina s racionálním exponentem

Příklad : Vyjádřete mocninu jako odmocninu $\underline{a}^{\frac{2}{3}}$

Řešení : $\underline{a}^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

Příklad 21 : Vyjádřete mocninu jako odmocninu :

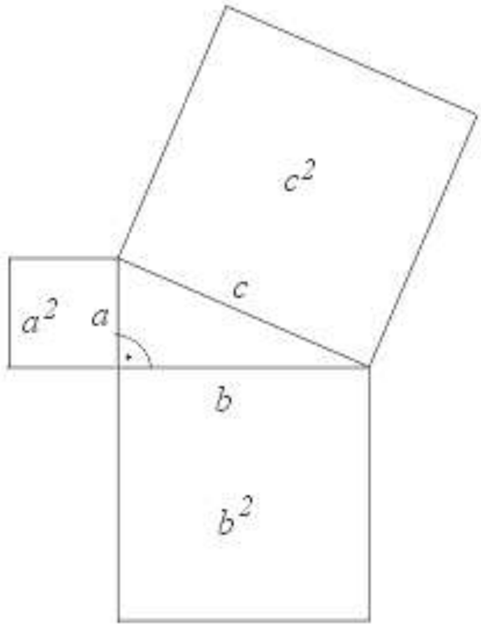
a) $5^{\frac{3}{4}}$
b) $2^{\frac{5}{7}}$
c) $x^{\frac{7}{8}}$
d) $d^{2\frac{1}{2}}$
e) $k^{-\frac{3}{4}}$
f) $7^{-2\frac{3}{4}}$
g) $2^{\frac{1}{2}}$
h) $2^{0,8}$

Příklad 22 : Vyjádřete odmocninu jako mocninu :

a) $\sqrt{a}$
b) $\sqrt[3]{a}$
c) $\sqrt[3]{a^2}$
d) $\sqrt[5]{2^4}$
e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
f) $\frac{1}{\sqrt[7]{2^6}}$
g) $\frac{5}{\sqrt[5]{v^4}}$
h) $\frac{7}{\sqrt[3]{p^2}}$

3.4. Pythagorova věta

Platí jen v **pravoúhlém** trojúhelníku.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

V pravoúhlém trojúhelníku platí : součet druhých mocnin obsahů čtverců nad **odvěsnami** se rovná obsahu čtverce nad **přeponou.**

Obrácená věta :
Je-li součet druhých mocnin obsahů čtverců nad dvěma menšími stranami trojúhelníka roven obsahu čtverce nad třetí stranou, pak tento trojúhelník je pravoúhlý.

Příklad : Vypočítejte velikost třetí strany pravoúhlého trojúhelníka ABC :
a) odvěsna a = 4 cm, odvěsna b = 5 cm;
b) odvěsna a = 6 cm, přepona b = 10 cm;

Řešení : a)
$a^2 + b^2 = c^2$
$4^2 + 5^2 = c^2$
$c^2 = 41$
$c = \sqrt{41}$ cm

b) $a^2 + c^2 = b^2$
$6^2 + c^2 = 10^2$
$c^2 = 64$
$c = 8$ cm

Příklad : Je trojúhelník ABC pravoúhlý ? :
a) a = 3 cm, b = 4 c m, c = 5 cm;
b) a = 3 cm, b = 4 c m, c = 7 cm;

Řešení :
a) Aby byl trojúhelník pravoúhlý, musí platit Pythagorova věta.
$a^2 + b^2 = c^2$
$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$
$25 = 25$

Δ ABC je pravoúhlý, protože platí Pythagorova věta.

b) Aby byl pravoúhlý, musí platit Pythagorova věta.

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + 4^2 = 7^2$

$9 + 16 = 49$

$25 \neq 49$

Δ ABC není pravoúhlý, protože neplatí Pythagorova věta.

Budeme si pamatovat, že trojúhelník, který má velikosti stran v libovolných jednotkách : a) 3; 4; 5; b) 6; 8; 10; c) 5; 12; 13; je pravoúhlý.

Příklad 23 : Rozhodněte, zda trojúhelník se stranami :
a) 85 mm, 132 mm, 157 mm je pravoúhlý;
b) 8,5 m, 13 m, 15,1 m je pravoúhlý;
c) 9,5 cm, 16,8 cm, 19,3 cm je pravoúhlý;
d) 7 cm, 24 cm, 25 cm je pravoúhlý;
e) 280 cm, 290 cm, 450 cm je pravoúhlý;

Příklad 24 : Vypočtěte délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, jsou-li jeho odvěsny :
a) a = 8 cm, b = 1,5 dm ;
b) a = 5 cm, b = 1,2 dm ;
c) a = 215 mm,
b = 32 cm;
d) a = 3 m, b = 4 m ;
e) a = 50 m, b = 23 m;
f) a = 57 m,
b = 111 m;
g) a = 2,25 m, b = 7,5 m ;

Příklad 25 : Jak dlouhá je úhlopříčka obdélníku, který má délky stran:
a) a = 1,3 dm, b = 37 cm ;
b) a = 125 dm, b = 27,5 m ;
c) a = 4 cm, b = 7,5 cm;

Příklad 26 : Vypočítejte délku druhé odvěsny pravoúhlém trojúhelníku jestliže:
a) c = 17 cm, a = 15 cm ; b) c = 0,2 m, a = 16 cm; c) c = 0,38 m,a = 26,8 cm;

Příklad 27 : Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníku KLM, který má:
a) rameno k = 28,5 cm a výšku na základnu v = 13 cm;
b) rameno k = 10 dm a základnu m = 12 dm;
c) základnu m = 62 mm a výšku na základnu 87 mm;

Příklad 28 : Vypočítejte délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, je-li dána přepona c a odvěsna a :
a) c = 5 cm, a = 3 cm;
b) c = 73 cm, a = 24 cm;
c) c = 5,25 cm, a = 1,5 cm;
d) c = 3,52 cm, a = 1,12 cm;

Příklad 29 : Kosočtverec ABCD má úhlopříčky e = 48 cm, f = 20 cm. Vypočítejte délku strany kosočtverce.

Příklad 30 : Jakou velikost má tětiva kružnice k(S; r = 6 cm), je-li vzdálena od bodu S 3 cm?

Příklad 31 : Rovnoramenný trojúhelník má základnu dlouhou 16 cm, jeho rameno je o 1 cm delší než základna. Vypočítejte obsah tohoto trojúhelníku.

Příklad 32 : V pravoúhlém trojúhelníku ABC je b=3 cm, c=2,5 cm, v_a=2,4 cm. Vypočítejte délku přepony a.

Příklad 33 : Je dán rovnoběžník s délkami úhlopříček 10 cm a 24 cm, a jedna jeho strana je dlouhá 130 mm. Určete, zda rovnoběžník je kosočtverec.

Příklad 34 : A, B, jsou dva různé body kružnice k(S; 7,5 cm) a jsou spojeny úsečkou AB = 9 cm. Vypočítejte vzdálenost středu S kružnice k od středu S' úsečky AB.

Příklad 35 : Základny pravoúhlého lichoběžníku ABCD s pravým úhlem při vrcholu A mají délku 92 cm a 76 cm, jeho výška se rovná 63 cm. Vypočítej délku ramene b.

Příklad 36 : Žebřík dlouhý 6 m je opřen o zeď. Jeho dolní konec je od zdi vzdálen 1,3 m. V jaké výšce se žebřík dotýká zdi?

Příklad 37 : Vypočítejte délku kanalizačního potrubí, které ve směru úhlopříčky spojuje dva rohy obdélníkového nádvoří s rozměry 45 m a 26 m.

Příklad 38 : Body A, B, C označují tři města. Město A leží 30 km severně od města B a 50 km západně od města C. Stanovte vzdálenost mezi městy B,C.

Příklad 39 : Kolmo rostoucí topol nalomil vítr ve výšce 6 m nad zemí. Vrchol dopadl na zem ve vzdálenosti 8 m od paty topolu. Určete původní výšku topolu.

Příklad 40 : Řemeslník má truhlu o rozměrech 2 m, 1 m, 1 m. Jakou největší délku je možno do truhly uložit, aby se truhla dala zaklopit víkem?

Příklad 41 : Pozemek má tvar pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 45 m a 28 m. Kdyby byla parcela čtvercová se stejnou výměrou, tak by plot kolem ní byl aspoň o 25 m kratší než okolo trojúhelníkové parcely. Je to pravda?

Příklad 42 : V jaké výšce se nachází nejvyšší bod známé šikmé věže v Pise, je-li její pobočná stěna dlouhá 55 m a náklon je 5 metrů (měřeno od paty věže).

Příklad 43 : Jahody jsou vysázeny v trojúhelníkovém sponu tak, že vzdálenost každých dvou sousedních sazenic je 45 cm. Jak daleko jsou od sebe jednotlivé řady?

Příklad 44 : Papírový drak je upoután na motouzu dlouhém 50 m a vznáší se přímo nad místem M. Místo M je vzdáleno 15 m od stanoviště, kde je drak upoután. Jak vysoko je drak nad vodorovným terénem?

Příklad 45 : Určete přímou vzdálenost aut po hodině jízdy od křižovatky dvou na sebe kolmých silnic, jestliže jela rychlostmi 90 km/h a 80 km/h, každé po jiné silnici.

Příklad 46 : Vypočtěte délky stěnových a tělesových úhlopříček krychle s hranou délky a = 6 cm.

3.4 Iracionální číslo

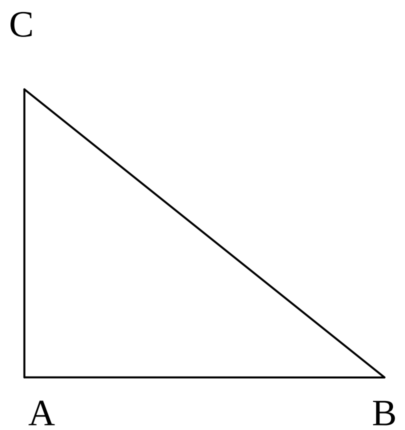
Iracionální číslo je takové reálné číslo, které nelze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Jde o číslo s neukončeným desetinným rozvojem.

Mezi iracionální čísla patří některé druhé odmocniny přirozených čísel. jejich násobky, součty rozdíly.

Například . $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{21}$; - $\sqrt{83}$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}\sqrt{2}$;

Sjednocením množiny racionálních čísel a množiny iracionálních čísel dostaneme množinu **reálných čísel**.

Grafické sestrojení velikosti odmocnin



c = 4 cm
b = 5 cm
a = (cm)

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 25 + 16$
$a^2 = 41$
a = $\sqrt{41}$ cm

Velikost některých odmocnin (v oboru přirozených čísel) můžeme přesně narýsovat jako součet nebo rozdíl druhých mocnin celých čísel.
Například :

odvěsna	odvěsna	přepona	důvod
2	1	$\sqrt{5}$	$2^2 + 1^2 = 5$

6	2	$\sqrt{40}$	$6^2 + 2^2 = 40$
1	$\sqrt{15}$	4	$4^2 - 1^2 = 15$
5	$\sqrt{24}$	7	$7^2 - 5^2 = 24$

Příklad 47 : Sestrojte :
a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{27}$ f) $\sqrt{32}$ g) $\sqrt{33}$

Souhrnná cvičení

1) Pomocí tabulek vypočítejte :

a) $26000^2 =$
b) $89\,000^2 =$
c) $560^2 =$
d) $0{,}35^2 =$
e) $77{,}7^2 =$
f) $0{,}457^2 =$
g) $230{,}6^2 =$
h) $41{,}069^2 =$
i) $3{,}4^2 . 0{,}8 =$
j) $240^2 - 32{,}5 =$
k) $2^2 . 3^2 . 5 =$
l) $(2 . 3 . 5)^2 =$
m) $2 . (3 . 5)^2 =$
n) $2^2 . (3^2 . 5)^2 =$
o) $\sqrt{206} =$
p) $\sqrt{9600} =$
r) $\sqrt{50800} =$
s) $\sqrt{9{,}36} =$
t) $\sqrt{7{,}2} =$
u) $\sqrt{60800} =$
v) $\sqrt{0{,}0286} =$
x) $\sqrt{0{,}09} - 0{,}5 . \sqrt{1{,}96} =$
y) $\sqrt{5^2 - 3^2} =$
z) $0{,}25 . \sqrt{16} + 5 =$

2) Vypočtěte :

a) $\sqrt{7} . \sqrt{7} =$
b) $0{,}5\sqrt{0{,}04} + \frac{1}{6}\sqrt{144} =$
c) $\sqrt{225} : \sqrt{25} =$
d) $0{,}5\sqrt{196} - 0{,}2\sqrt{0{,}36} =$
e) $\sqrt{0{,}25 . 0{,}64} . \sqrt{0{,}36 . 25} =$
f) $\sqrt{10} . \sqrt{8} . \sqrt{5} =$
g) $\sqrt{\frac{0{,}16}{0{,}81}} =$
h) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{0{,}04}} =$
i) $\frac{2 . \sqrt{49}}{\sqrt{4 . 81}} =$
j) $\frac{5 + \sqrt{1}}{\sqrt{25 - 16}} =$
k) $8 . \sqrt{1\frac{9}{16}} - 12 =$
l) $\sqrt{1\frac{7}{9}} + \frac{1}{7} . \sqrt{0{,}0196} =$

3) Čtvercová podlaha se stranou délky 6,4 m má stejný obsah jako obdélníková podlaha se šířkou 5,12 m. Vypočítejte velikost úhlopříčky obdélníkové podlahy.

4) Lesní lokalita měla tvar čtverce. Devastací porostu se její výměra zmenšila o 940 000 m^2. Z původního lesa zbyl cíp ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnou délky 1001,1 m. Jaké byly původní rozměry lesní lokality?

5) Žáci pěstovali léčivé rostliny na dvou záhonech stejně velkého obsahu. První záhon měl tvar obdélníku s rozměry 10 m a 2,5 m. Druhý záhon měl tvar čtverce. Vypočítejte délku jeho strany a úhlopříčku.

6) Určete délku strany čtvercového území, které má stejnou rozlohu jako Česká republika, tj. asi 78 864 km^2.(výsledek zaokrouhlete na celé kilometry)

7) Původní školní hřiště mělo tvar čtverce se stranou dlouhou 22 m. Po zvětšení o 141 m^2 mělo opět tvar čtverce. Kolik obrubníků s délkou 0,5 m se spotřebovalo na jeho ohraničení? Mezery mezi obrubníky neberte v úvahu).

8) Stěna velké krychle má obsah 80 dm^2. O malé krychli víme, že se její povrch rovná 80% povrchu krychle. Určete délku hrany malé krychle.

9) Pan Novák se rozhodl, že na čtvercovém pozemku s výměrou 81 arů vybuduje sad. Kolik metrů drátěného pletiva spotřebuje na jeho oplocení, jestliže vrata a dvířka s celkovou délkou 8 metrů vyrobí z jiného materiálu?

10) Šroub je namáhán ve dvou navzájem kolmých rovinách silami F_1=350 N a F_2=250 N. Vypočítejte výslednici těchto sil.

11) Vypočítejte povrch a objem krychle, má-li její:
a) stěnová úhlopříčka délku 98 cm;
b) tělesová úhlopříčka délku 100 cm;

12) V pravoúhlém trojúhelníku ABC je dána odvěsna a = 3,6 dm a obsah S = 543cm^2. Vypočítejte velikost odvěsny b a těžnice t_b.

13) Výška trojúhelníku KLM příslušná ke straně KL má délku 12 cm a dělí stranu KL na dvě části o délkách 5 cm, 9 cm. Vypočtěte :
a) délku stran trojúhelníku KLM;
b) obvod trojúhelníku KLM;
c) obsah trojúhelníku KLM.

14) V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C má strana $\underline{a}$ 10 cm, t_a = 13 cm. Vypočtěte délku těžnice na stranu $\underline{b}$.

15) Kvádr ABCDEFGH má rozměry /AB/ = 6 cm, /BC/ = 6 cm, /AE/ = 8cm. Vypočtěte obsah trojúhelníka BEG.

16) Kosočtverec má úhlopříčky o velikosti 24 cm a 48 cm. Vypočtěte obvod.

17) V pravoúhlém trojúhelníku ABC je dána odvěsna a = 3,6 dm a obsah S = 540 cm^2. Vypočtěte velikost odvěsny $\underline{b}$ a těžnici $\underline{t_b}$.

18) Vypočtěte obvod rovnostranného trojúhelníka ABC, který má výšku v = 4,2 cm.

19) Vypočtěte délku zbývající úhlopříčky v kosočtverci ABCD, známe-li a = 5,2 cm a u = 4 cm.

20) Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky krychle o hraně 6 cm.

21) Vypočtěte objem krychle, jejíž stěnová úhlopříčka měří 6,22 cm.

22) Vypočtěte délku všech tří stran trojúhelníka ABC víte-li, že t_a je kolmá na t_c:
a) t_a = 6 cm, t_c = 9cm;
b) t_a = 9 cm, t_c = 4,5 cm.

23) Jak daleko jsou od sebe hroty ručiček v 9.00 hodin? Velká ručička 9,6 mm a malá ručička 4 mm.

24) Najděte taková čísla, pro které současně platí :
a) jedno je dvouciferné a druhé je trojciferné číslo;
b) jejich druhé mocniny končí stejným trojčíslím;
c) jejich druhé odmocniny jsou celá čísla a končí stejnou číslicí.

25) Vypočtěte : $\frac{12^3.49^{-2}.14^2}{32^5.6^{-3}.9^2}$

26) ABCD je rovnoramenný lichoběžník . a = 15 cm, b = d = 5 cm, c = 7 cm. Vypočtěte obsah lichoběžníku.

Výsledky příkladů

1) a) 2^{10}; **b)** $(-3)^6$; **) a)** $3^4a^4b^4$; **b)** 20ab;
3) a) 1 600; **b)** 490 000; **c)** 81 000 000; **d)** 144 000 000; **e)** 25 600 000 000;
f) 40 000; **g)** 3 610 000; **h)** 0,0169; **i)** 0,000169; **j)** 0,00000196;
k) 0,0324; **l)** $\frac{9}{49}$; **m)** $\frac{121}{225}$; **n)** $12\frac{1}{4}$; **o)** $21\frac{7}{9}$; **p)** 5 184; **r)** 2 916; **s)** 2,56; **t)** 6,25;
4) a) 3 249; **b)** 65 536; **c)** 2 968 400; **d)** 0,0841; **e)** 71,0649;
f) 0,0000150544; **g)** 86 436 000 000; **h)** 30 625 000 000 ; **i)** 25,2004;
j) 345,96;
5) a) 4 949,49; **b)** 167,2931; **c)** -4; **d)** 64,84; **e)** 16; **f)** 0,64; **g)** 4;
h) -3,8316; **i)** 5,8; **j)** 0,6911;
6) a) 185 193; **b)** 16 777 216; **c)** 5 115 120 067; **d)** 0,024389;
e) 599,077107; **f)** 0,000000058411072; **g)** 25 412 184 000 000 000;
h) -126,506008; **i)** 6 434,856;
7) a) 343 343,343; **b)** 2 194,800803 **c)** -22; **d**) 406,936; **e)** 64; **f)** 0,256;
g) -8; **h**) -4,673216448; **i)** 0,764063;
8) a) $\frac{1}{36}$; **b)** $\frac{1}{125}$; **c)** 0,0001; **d)** $\frac{4}{9}$; **e)** $3\frac{3}{8}$; **f)** $1\frac{9}{16}$; **g)** $\frac{27}{512}$; **h)** $\frac{125}{343}$;
i) $\frac{4}{49}$; **j)** $2\frac{7}{9}$; **k)** $-2\frac{7}{9}$; **l)** -27; **m)** -16; **n)** 32; **o)** $\frac{1}{32}$;,
9 a) 2,89; **b)** 3 610 000; **c)** 0,0625; **d)** 0,00000289; **e)** 640 000; **f)** 0,0196;
g) 243; **h)** 1,69; **ch)** -0,00032; **i)** -16; **j)** $\frac{16}{21}$**;** **k)** $-1\frac{91}{125}$; **l)** 4 096; **m)** $\frac{1}{16}$;
n) $6\frac{1}{4}$; **o)** 16; **p)** $1\frac{1}{8}$; **r)** $\frac{1}{1024}$**;** **s)** 1;
10 a) $(-2)^2 > -2^2$, **b))** $(-3)^3 = -3^3$, **c)** $-1^7 = -(1)^7$

11 a) 569 373; **b) 2 694 699 729**; **12 a)** $\frac{61}{225}$**;** **b)** 19 $\frac{133}{200}$; **c)** – 2,89;
13 a) $3^6 . 2^{-13}$; **b)** $2^{-8} . 3^{-8}$; **c)** $2^{12} . 5^2$; **d)** $3^9 . 2^{24}$; **e)** $3^2.2^{-14}.7^{-2}$; **f)** $2^9.3^{-7}.5^{-4}.7$
14 a) 0,12; **b)** $10\sqrt{2}$; **c)** 3 000; **d)** 0,19; **e)** 2,5 ; **f)** 0,1; **g)** 1,25; **h)** 12;
i) nemá řešení; **j)** 700; **k)** 2500; **l)** 400 000; **m)** 0,7; **n)** 1,6; **o)** 0,12; **p)** 0,16;
r) 0,003; **s)** 1,5; **t)** $10.\sqrt{5}$;
15) a) 18; **b)** 14; **c)** 13; **d)** 19; **e)** 3 000; **f)** -148; **g)** -107,3; **h)** 32;
i) $190 - 10 . \sqrt{2}$; **j)** 12,12; **k)** -2 999,81;
16) a) $\frac{2}{5}$; **b)** $3\frac{3}{4}$; **c)** $1\frac{3}{5}$; **d)** $\frac{4}{5}$; **e)** $\frac{1}{14}$; **f)** $\frac{11}{40}$; **g)** $\frac{3}{8}$; **h)** $1\frac{10}{11}$; **i)** $1\frac{7}{20}$;
17) a) 2,94; **b)** 2,38; **c)** 0,0277; **d)** 52,7; **e)** 0,393; **f)** 2,02; **g)** 85,2; **h)** 3,42; **i)** 10,6;
j) 178,9; **k)** 2,394; **l)** 1,871; **m)** 12,5; **n)** 8 370; **o)** 0,4; **p)** 258,8;
r) 2,685; **s)** 2,049; **t)** 21,2; **u)** 8940; **v)** 0,55;
18) a) 4 080; **b)** 4 389; **c)** 10,8; **d)** 23,1; **e)** 20; **f)** 1,055; **g)** 0,5; **h)** 7,6625;
i) 39,4375; **j)** 6,84; **k)** -9,16;
19) a) 2,94; **b)** 2,38; **c)** 0,0277; **d)** 52,7; **e)** 0,393; **f)** 2,02; **g)** 85,2; **h)** 3,42; **i)** 10,6;
j) 178,9; **k)** 2,394; **l)** 1,871; **m)** 12,5; **n)** 8 370; **o)** 0,4; **p)** 258,8;
r) 2,685; **s)** 2,049; **t)** 21,2; **u)** 8940; **v)** 0,55; **w)** 141,4; **z)** 310,2
20 a) 2; **b)** 3;, **c)** 2; **d)** 4; **e)** a^3 $a \geq 0$; **f)** a $a \geq 0$; **g)** a^2 $a \geq 0$; **h)** zatím pro nás nemá řešení; **ch)** 1;
21) a) $\sqrt[4]{5^3}$; **b)** $\sqrt[7]{2^5}$; **c)** $\sqrt[8]{x^7}$; **d)** $\sqrt{d^5}$**;** **e)** $\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}$; **f)** $\frac{1}{\sqrt[4]{7^{11}}}$; **g)** $\sqrt{2}$**;** h) $\sqrt[5]{2^4}$

22) a) $a^{\frac{1}{2}}$; **b)** $a^{\frac{1}{3}}$; **c)** $a^{\frac{2}{3}}$; **d)** $2^{\frac{4}{5}}$; **e)** $5^{-\frac{1}{2}}$; **f)** $2^{-\frac{6}{7}}$; **g)** $5.v^{-\frac{4}{5}}$; **h)** $7.p^{-\frac{2}{3}}$
23) a) ano; **b)** ne; **c)** ano; **d)** ano; **e)** ne
24) a) 17 cm; **b)** 13 cm; **c)** 38,55 cm; **d)** 5 m; **e)** 55 m; **f)** 124,8 m;
g) 7,8 m ;
25) a) 39,22 cm; **b)** 302,08 dm; **c)** 8,5 cm; **26) a)** 8 cm; b) 12 m; c) 26,9 cm;
27) a) 329,7 cm^2; **b)** 48 dm^2; **c)** 2697 mm^2;
28) a) 4 cm; **b)** 68,942 cm; **c)** 5,03 cm; **d)** 3,34 cm;
29) 26 cm; **30)** asi 10,4 cm**; 31)** 120 cm^2 ; **32)** 3,125 cm; **33)** je to kosočtverec; **34)** 6 cm; **35)** 65 cm; **36)** 5,86 cm; **37)** 52 m ; **38)** 58,3 km; **39)** 16 m; **40)** 2,45 m; **41)** ano; **42)** 54,77 m; **43)** 39 cm; **44)** 47,7 m; **45)** 120,4 km; **46)** 8,48 cm; 10,4 cm; **47) a)** $4^2 - 2^2$; b) $4^2 + 2^2$; c) $5^2 - 1^2$; d) $5^2 + 1^2$; e) $6^2 - 3^2$; f) $4^2 + 4^2$; g) $7^2 - 4^4$;

Výsledky souhrnných cvičení

1) a) 676 000 000; **b)** 7 921 000 000; **c)** 313 600; **d)** 0,1225; **e)** 6 037,29;
f) 0,208849; **g)** přibližně 53 361; **h)** přibližně 1 681; **i)** 9,248; **j)** 57 567,5;
k) 180; **l)** 900; **m)** 450; **n)** 8 100; **o)** 14,35; **p)** 98; **r)** 225,4; **s)** 30,59;
t) 2,683; **u)** 246,6; **v)** 0,1691; **x)** -0,4; **y)** 4; **z)** 6;
2) a) 7; **b)** 2,1; **c)** 3; **d)** 6,88; **e)** 1,2; **f)** 20; **g)** $\frac{4}{9}$; **h)** 40; **i)** $\frac{7}{9}$; **j)** 2;
k) -2; **l)** $1\frac{53}{150}$;**3)** přibližně 9,5 m; **4)** 1 200 m; **5)** **5** m; $5.\sqrt{2}$ m; **6)** 281 km;

7) 200; **8)** 8 dm; **9)** 352 m; **10)** 430 N; **11) a)** S = 28 812 cm^2,V = 332 762 cm^3; **b)** S = 20000 cm^2, V = 192450 cm^3; **12)** b = 30 cm, t_b= 39 cm ;
13) a) Existují dvě možnosti : m = 14 cm, k = 15 cm, l = 13 cm nebo m = 14 cm, l = 15 cm, k = 13 cm; **b)** 42 cm; **c)** 84 cm^2 ; **14) b=**12 cm; t_b = 11,66 cm **15) 50** cm^2;
16) 107,32 cm; **17)** b = 30 cm; t_b = 39 cm; **18)** 14,55 cm; **19)** u = 9,6 cm;
20) 10,4 cm; **21)** 85,18 cm^3; **22) a)** a = 12,64 cm, b = 7,21 cm, c = 10 cm; **b)** a =8,48 cm, b = 6,71 cm, c = 12,36 cm;
23) 10,4 mm; **24)** 25-225; 25-625; **25)** $3^2.2^{-14}.7^{-2}$; **26)** 33 cm^2;