# 6. Čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, hranoly

## 6.1. Základní pojmy

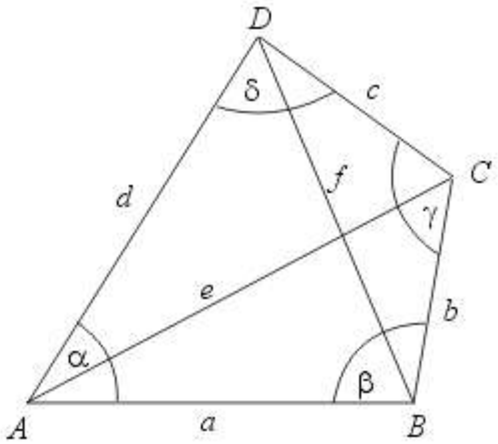
### 6.1.1. n – úhelník

**n - úhelník** pro n > 2 je geometrický obrazec, který má n vrcholů ( stran, vnitřních úhlů ).
Rozlišujeme : trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, …..

Trojúhelník byl učivem 6. ročníku.

### 6.1.2. Členění čtyřúhelníka

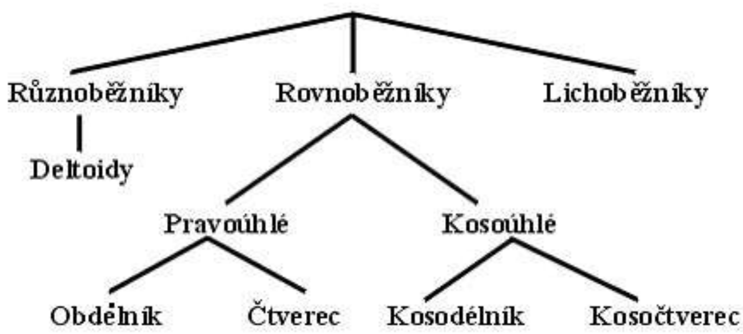
**Čtyřúhelník** je geometrický obrazec, který má čtyři vrcholy ( strany ).



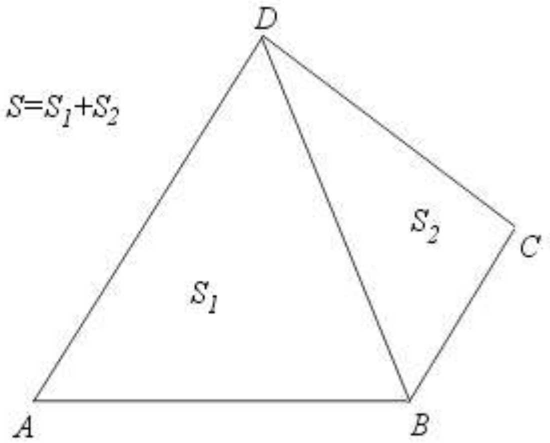

A, B, C, D ... vrcholy čtyřúhelníku
*AB = a, BC = b, CD = c, DA = d* ... strany čtyřúhelníku
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... vnitřní úhly čtyřúhelníků
*AC = e, BD = f* … úhlopříčky čtyřúhelníku

Vrcholy se popisují proti směru hodinových ručiček.

Podle vztahu protilehlých stran **rozdělujeme čtyřúhelníky** na :
**rovnoběžníky** – obě dvojice protilehlých stran jsou rovnoběžné;
**lichoběžníky** – jedna dvojice protilehlých stran je rovnoběžná, druhá dvojice protilehlých stran je různoběžná;
**různoběžníky –** ani jedna dvojice protilehlých stran není rovnoběžná.



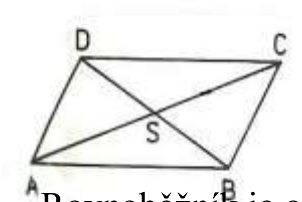
**Obsah** čtyřúhelníku je roven součtu obsahů dvou trojúhelníků, na které je možné čtyřúhelník rozdělit úhlopříčkou.




# 6.2. Rovnoběžník a jeho vlastnosti

## 6.2.1. Úhlopříčka

**Úhlopříčka rovnoběžníka** je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy rovnoběžníka.



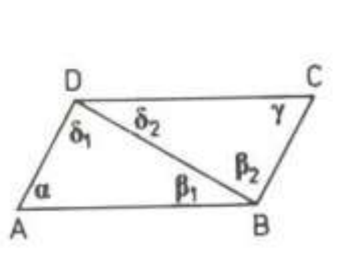

Průsečík úhlopříček **půlí úhlopříčky.**

Úhlopříčky se v rovnoběžníku **navzájem půlí.**

Rovnoběžník je obrazec **středově souměrný** podle průsečíku úhlopříček.

## 6.2.2. Úhly

**Součet vnitřních úhlů v rovnoběžníku je 360º.**




Důkaz : $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ$

$\beta_2 + \gamma + \delta_2 = 180^\circ$

Sečteme-li tyto rovnice, pak dostaneme :

$\alpha + \beta_1 + \delta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_2 = 360^\circ$

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ}$

**Pro sousední vnitřní úhly rovnoběžníku platí, že jejich součet je 180** º.

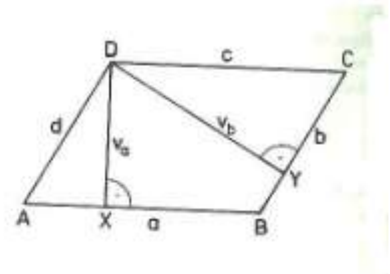
**Příklad 1:** Jak velké jsou úhly čtyřúhelníku, jsou-li v poměru 8 : 9 : 10 : 13?

**Pro protilehlé vnitřní úhly v rovnoběžníku platí, že velikost protilehlých úhlů je stejná ( úhly jsou shodné ).**
Společný důkaz :
AB // CD a BC // AD $\Rightarrow$ vnější úhel k úhlu $\beta$ je úhel stejně veliký jako úhel $\alpha$ ( dvojice souhlasných úhlů ).
Tento vnější úhel s úhlem $\gamma$ tvoří dvojici střídavých úhlů $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = \gamma}$.

**Protilehlé strany rovnoběžníka mají stejnou velikost ( jsou shodné ).**

### 6.2.3. Výška

**Výška v rovnoběžníku** je úsečka spuštěná z vrcholu na protější stranu.
Výška v rovnoběžníku je vzdálenost dvou rovnoběžných stran.




Každý rovnoběžník, kromě takového, který má všechny strany stejně veliké, má dvě dvojice stejně velikých výšek.

### 6.2.4. Obvod a obsah

**Obvod rovnoběžníka** $\quad$ **O = 2 . ( a + b )**
**Obsah rovnoběžníka** $\quad$ **S = a . $v_a$**

Podle velikosti vnitřních úhlů dělíme rovnoběžníky :
**pravoúhlé rovnoběžníky** – vnitřní úhly rovnoběžníka jsou pravé
$\Rightarrow$ obdélník, čtverec
**kosoúhlé rovnoběžníky** – vnitřní úhly rovnoběžníka jsou kosé
$\Rightarrow$ kosodélník, kosočtverec

**Příklad :** Vypočtěte obvod rovnoběžníku, jehož strany mají délku a = 13 cm, b = 6 cm.
Řešení : O = 2 . ( a + b )
O = 2 . ( 13 + 6 )
**O = 38 cm**

**Příklad :** Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který má stranu a = 3 cm a výška příslušná k této straně měří 5 cm.

Řešení : S = a . $v_a$
S = 3 . 5
**S = 15 cm$^2$**

**Příklad 2 :** Vypočtěte obvod rovnoběžníku, jehož strany mají délku :
a) $a = 32{,}5$ cm, $b = 14{,}7$ cm; b) $a = 6{,}2$ m, $b = 12$ dm;

**Příklad 3 :** Vypočítej obsah rovnoběžníku, jehož strana a příslušná výška má délku : a) $a = 23$ cm $v = 7$ cm; b) $b = 14{,}6$ dm $v = 8{,}2$ dm;
c) $a = 0{,}64$ m $v = 35$ cm.;

**Příklad 4 :** Obsah rovnoběžníku se rovná $10{,}24\ m^2$ . Vypočítejte výšku příslušnou k této straně, jestliže tato strana měří 25,6 m.

**Příklad 5 :** Obsah rovnoběžníku se rovná $38{,}88\ cm^2$ . Vypočítejte jeho stranu, jestliže příslušná výška měří 5,4 cm.

**Příklad 6 :** Vypočtěte obvod, obsah a druhou výšku rovnoběžníka , známe-li :
a) $a = 5$ cm; $b = 7$ cm; $v_a = 7$ cm;
b) $a = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}1$ cm; $v_a = 6{,}3$ cm

**Příklad 7 :** Rovnoběžník má :
a) má obvod 5,3 m. Jedna jeho strana má délku 35 cm. Vypočítejte o kolik cm je delší strana rovnoběžníka delší než menší strana.
b) obsah $1{,}2\ m^2$. Jedna jeho strana má délku 12 dm. Vypočítejte výšku k příslušné straně

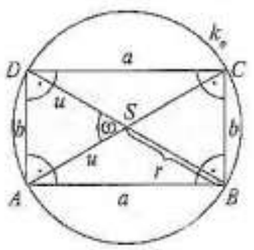
**Příklad 8 :** V rovnoběžníku jsou a, b dvě sousední strany a $v_a$ příslušná výška ke straně a, $v_b$ příslušná výška ke straně b.
a) Vypočtěte jeho obsah, je-li $a = 6{,}4$ cm, $v_a = 86$ mm.
b) Vypočtěte jeho stranu a , je-li $b = 3{,}5$ cm, $v_a = 0{,}5$ cm, $v_b = 1{,}47$ mm.
c) Vypočtěte jeho výšku $v_a$ , je-li $a = 0{,}35$ m, $b = 4{,}9$ dm, $v_b = 5$ cm.
d) Vypočtěte jeho obvod, je-li $a = 21$ cm, $v_a = 14$ cm, $v_b = 42$ cm.
e) Vypočtěte jeho výšku $v_a$ , je-li $O = 40$ cm, $b = 15$ cm, $v_b = 15$ cm.

**Příklad 9 :** Sestrojte rovnoběžník ABCD, pro který platí :
a) $a = 5{,}1$ cm, $b = 4{,}4$ cm, $\beta = 45°$;
b) $a = 4{,}5$ cm, $b = 5$ cm, /AC/ = 7 cm,;
c) $b = 5$ cm, $c = 65$ mm, / BD / =7 cm;
d) / AB / = 55 mm, / BC / = 6,5 cm, / BD / = 7 cm;
e) / BC / = / CD / = 75 mm, / AC / = 7 cm;
f) $a = 87$ mm, $b = 5$ cm, $\alpha = 52{,}5°$ ;
g) $a = 6{,}5$ cm, $e = 8$ cm, $\beta = 75°$;
h) $a = 68$ mm, $b = 56$ mm, $f = 81$ mm;
i) kosočtverec $e = 7{,}8$ cm, $f = 6$ cm;
j) / AC / = 6 cm, / BD / = 5 cm, /$\angle$ ASB / = 120°;
k) / AC / = 75 mm, / BD / = 5 cm, / $\angle$ BSC / = 105°;
m) / AB / = 75 mm, / BD / = 5 cm, $v_a = 3{,}5$ cm
n) / AB / = 75 mm, / BD / = 5 cm, $v_a = 5{,}5$ cm

# 6.3. Pravoúhlý rovnoběžník

## 6.3.1. Obdélník

**Obdélník** je pravoúhlý rovnoběžník, který nemá stejné délky sousedních stran.




AC = u – úhlopříčka

$u = \sqrt{a^2 + b^2}$

ω – úhel, který svírají úhlopříčky

r – poloměr kružnice opsané

r = 0,5 . u

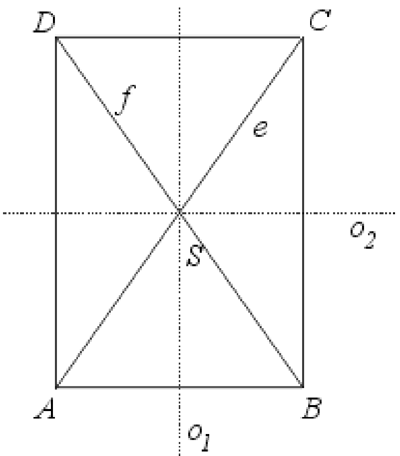
Obvod obdélníka $O = 2 . ( a + b )$

Obsah obdélníka $S = a . b$

**Úhlopříčky obdélníka** : a) jsou shodné ;
b) navzájem se půlí.

**Průsečík úhlopříček je středem** : a) souměrnosti;
b) kružnice obdélníku opsané.

Obdélník je **osově souměrný**. Má dvě osy souměrnosti – osy protějších stran.




**Příklad 10 :** Vypočítejte obvod a obsah obdélníku s rozměry :
a) 12,4 cm a 2,5 dm;
b) 5,3 cm a 0,5 dm;

**Příklad 11 :** Vypočtěte obvod obdélníka, známe-li :
a) $S = 6\ m^2$; a = 20 dm;
b) $S = 241\ 400\ mm^2$; b = 3,4 dm;
c) $S = 0{,}2496\ m^2$; a = 48 cm;
d) $S = 0{,}42\ dm^2$; a = 70 mm;
e) $S = 0{,}0015\ m^2$; b = 5 cm;
f) $S = 328\ cm^2$, b = 0,82 m
g) $S = 36\ cm^2$ ; a = 1,8 dm

**Příklad 12 :** Vypočtěte obsah obdélníka, známe-li :
a) O = 20 cm; a = 4 cm; b) O = 21 cm; a = 3,4 cm;
c) O = 0,452 m; a = 15,4 cm; d) a = 8 cm; u = 10 cm;

**Příklad 13 :** Plechová střecha má tvar obdélníku s rozměry 7,5 m a 4 m. Kolik kilogramů barvy se spotřebuje na její nátěr, jestliže 1 kg vystačí na natření 8 $m^2$ plechu?

**Příklad 14 :** Obora tvaru obdélníku má výměru 235,98 ha. Jedna strana má délku 2 km 700 m. Vypočítejte délku druhé strany.

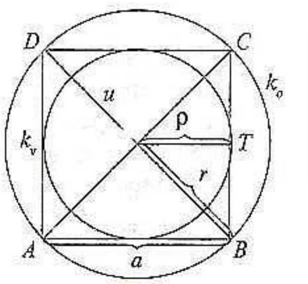
**Příklad 15 :** Ze dvou stejně velkých obdélníků má každý plochu 945 $m^2$. První obdélník je dlouhý 45 m a druhý má délku 35 m. O kolik je obvod prvního obdélníka větší než obvod druhého obdélníka ?

**Příklad 16 :** Kolik $m^2$ tapety je třeba na vytapetování místnosti o rozměrech 7,2 m a 5,4 m, která je vysoká 3,3 m, budeme-li dávat tapetu pouze na stěny do výšky 10 cm od stropu? V místnosti je jedno okno o rozměrech 2,5 m krát 2,5 metru a dveře o rozměrech 1,2 m krát 2 m, které také nebudeme tapetovat. Ztráty při tapetování činí 10 % . Kolik budeme potřebovat rolí tapet o šířce 1 metr a délce 15 metrů ?

**Příklad 17 :** Sestrojte obdélník ABCD, známe-li :
a) a = 7 cm, b = 4 cm;
b) a = 4 cm, u = 6 cm;
c) úhlopříčky mají délku 12 cm a svírají úhel 60°;
d) / AC / = 9 cm, úhel ASD je 30°, S je průsečík úhlopříček;

### 6.3.2. Čtverec

**Čtverec** je pravoúhlý rovnoběžník, který má délky sousedních stran stejné.

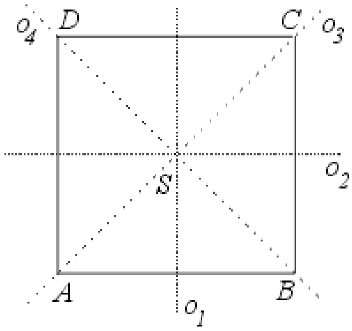



$u = a \cdot \sqrt{2}$
$r = 0,5 \cdot a \cdot \sqrt{2}$
$\rho = 0,5 \cdot a$

Obvod čtverce $O = 4 \cdot a$
Obsah čtverce $S = a \cdot a$ $S = 0,5 \cdot u \cdot u$

**Úhlopříčky :** a) jsou shodné ;
b) navzájem se půlí ;
c) jsou navzájem kolmé ;
d) jsou osami vnitřních úhlů ;
e) jejich průsečík je středem souměrnosti čtverce a je středem kružnice opsané i vepsané.

Čtverec je **osově souměrný**. Má čtyři osy souměrnosti – dvě úhlopříčky a dvě osy protějších stran.




**Příklad 18 :** Je dána strana čtverce o velikosti a = 4 m. Určete velikost strany čtverce s obsahem dvojnásobným.

**Příklad 19 :** Vypočtete obsah čtverce a velikost strany čtverce s úhlopříčkou u = 5 cm.

**Příklad 20 :** Je možné, aby jeden a ten samý čtverec měl :
a) obvod 36 cm a obsah 49 $cm^2$;
b) obvod 44 cm a obsah 121 $cm^2$;
c) numericky stejné číslo obvod i obsah;
d) stranu 5 cm a úhlopříčku 5. $\sqrt{2}$ ;
e) poloměr kružnice opsané poloviční vzhledem k úhlopříčce;
f) stranu $\sqrt{2}$ cm a obsah 2 $cm^2$;
g) poměr r : ρ = $\sqrt{2}$ ;
h) O = 8 . ρ;
i) S = 4 . ρ ;
j) $r^2 = \rho^2 + 0{,}25 \cdot a^2$;

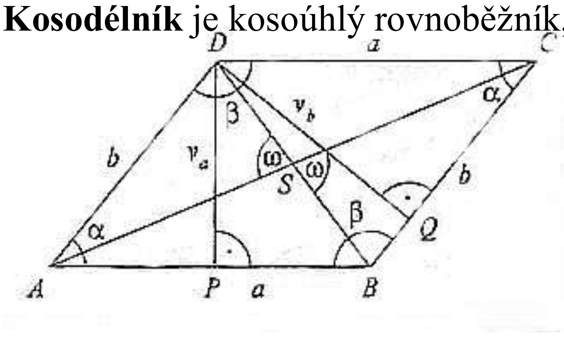
**Příklad 21 :** Body E, F, G, H jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtverce ABCD. Kolik procent obsahu čtverce ABCD je obsah čtyřúhelníku EFGH?.

**Příklad 22 :** Sestrojte čtverec, je-li dáno : a) a = 5 cm; b) u = 5 cm;
c) r = 5 cm; d) ρ = 5 cm; e) O = 5 cm;

# 6.4. Kosoúhlý rovnoběžník

### 6.4.1. Kosodélník

**Kosodélník** je kosoúhlý rovnoběžník, který nemá stejné délky sousedních stran.




ω – úhel, který svírají úhlopříčky
$v_a$; $v_b$ – výšky kosodélníka

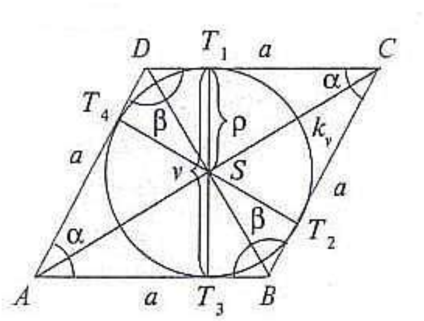
**Obvod kosodélníka** $O = 2 . ( a + b )$
**Obsah kosodélníka** $S = a . v_a$ $S = b . v_b$

**Úhlopříčky kosodélníku** navzájem se půlí.
Jejich průsečík je střed souměrnosti kosodélníku.

**Příklad 23 :** Sestrojte kosodélník ABCD, je-li :
a) / AB / = 64 mm , / AD / = 36 mm a úhel jimi sevřený $\alpha = 60°$;
b) a = 54 mm, d = 26 mm, / BD / = f = 77 mm;
c) a = 48 mm, $\alpha = 60°$ a úhlopříčka BD je 69 mm;
d) a = 48 mm, $\alpha = 60°$, výška v = 4 cm;

### 6.4.2. Kosočtverec

**Kosočtverec** je kosoúhlý rovnoběžník, který má stejné délky sousedních stran.



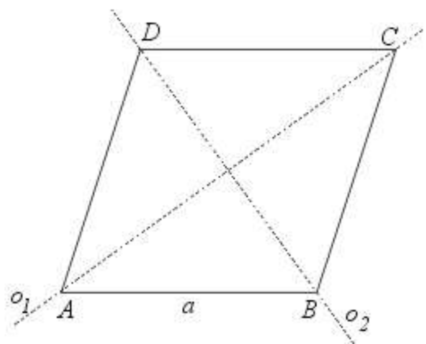

$v_a = v_b$
$( 0{,}5.e)^2 + (0{,}5.f)^2 = a^2$

**Obvod kosočtverce** $O = 4 . a$
**Obsah kosočtverce** $S = a . v_a$ $S = 0{,}5.e.f$ $S = 2.a. \rho$

**Úhlopříčky :** a) navzájem se půlí;
b) jsou navzájem kolmé;
c) jsou osami vnitřních úhlů.

**Průsečík úhlopříček :**
a) jejich průsečík je středem středové souměrnosti;
b) jejich průsečík je středem kružnice vepsané kosočtverci.

**Kosočtverec je osově souměrný**. Má dvě osy souměrnosti – úhlopříčky.



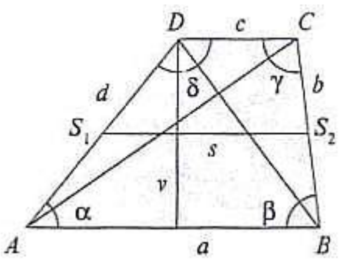
**Příklad 24 :** Vypočtěte obvod a obsah kosočtverce, znáte-li délku strany a výšku :
a) a = 5 cm; v = 4 cm;
b) a = 4,5 cm; v = 7,4 cm;
c) a = 25 cm; v = 4,6 dm;

**Příklad 25 :** Vypočtěte obsah kosočtverce, známe-li :
a) O = 24 cm; v = 7 cm;
b) O = 62 cm; v = 7,1 cm
c) O = 50 cm; v = 5 cm;
d) e = 12 cm; f = 15 cm;
e) a = 4 cm; f = 3 cm;
f) a = 5 cm; e = 6 cm;
g) a = 10 cm; f = 8 cm;

**Příklad 26 :** Sestrojte kosočtverec, je-li dáno :
a) /AB/ = 5 cm; /AC/ = 6 cm;
b) / AB/ = 6 cm; e = 5 cm;
c) a = 5 cm; α = 65°;
d) e = 8 cm; α = 65°;
e) a = 5 cm; f = 6 cm;
f) e = 5 cm; f = 6 cm;

# 6.5. Lichoběžník

### 6.5.1. Základní pojmy




a // c  a, c – základny
b není rovnoběžné s d,
b, d – ramena lichoběžníka
s – střední příčka lichoběžníka
v – výška lichoběžníka ( vzdálenost základen )

### 6.5.2. Střední příčka

**Střední příčka** : je rovnoběžná se základnami;
spojuje středy ramen lichoběžníka;
s = 0,5 . ( a + c)

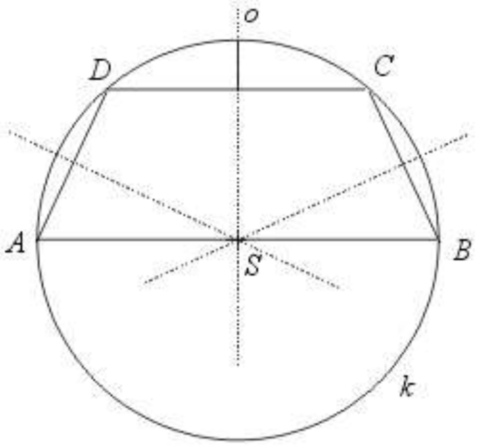
### 6.5.3. Obvod a obsah

**Obvod lichoběžníka** O = a + b + c + d

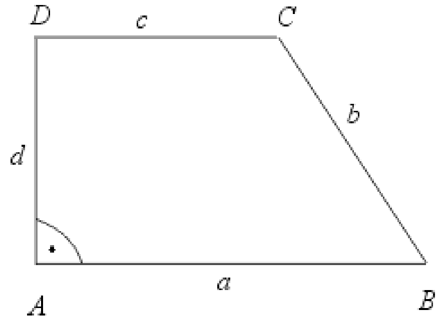
**Obsah lichoběžníka** $S = \frac{(a+c)}{2}.v$   S = s . v

## 6.5.4. Rovnoramenný a pravoúhlý lichoběžník

**Rovnoramenný lichoběžník** je takový lichoběžník, který má stejně veliká ramena ( jsou shodná ). je-li a // c b = d




**Pravoúhlý lichoběžník** je takový lichoběžník, který má jedno rameno kolmé na základny.




**Příklad 27 :** Vypočtěte obsah lichoběžníku, jsou-li dány obě základny a,c a výška : a) a = 5 cm, c = 9 cm, v = 4 cm;
b) a = 12 cm, c = 85 cm, v = 3,5 dm;

**Příklad 28 :** Lichoběžník má obsah 2 $dm^2$, základny 25 cm a 15 cm. Vypočtěte jeho výšku.

**Příklad 29 :** Vypočítejte délku ramen rovnoramenného lichoběžníka ABCD, známe-li obvod a délky základen :
a ) O = 26 cm; a = 5 cm; c = 7 cm;
b) O = 125 cm; a = 44 cm; c = 25 cm;
c) O = 2 m; a = 42 cm; c = 5 dm;

**Příklad 30:** Vypočítejte obsah a obvod pravoúhlého lichoběžníka ABCD s pravým úhlem při vrcholu A, je-li dáno a //c :
a) a = 5 cm; c = 9 cm; d = 4 cm;
b) a = 4,2 cm; c = 3,1 cm; d = 3,9 cm

c) a = 17 cm; c = 2,4 dm; d = 1,3 dm;

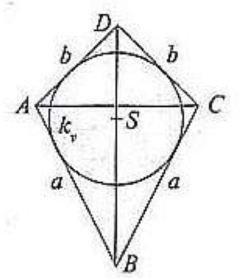
**Příklad 31 :** Sestrojte lichoběžník ABCD ( AB // CD), je-li dáno :
a) a = 5 cm, b = 4,5 cm, / AC / = 6 cm , / CD / = 4 cm;
b) a = 5,5 cm, b = 5,5 cm, / AD / = 7,5 cm, $\alpha = 60°$;
c) a = 65 mm , b = 7 cm, c = 75 mm, $\beta = 105°$ ;
d) / AB /= 74 mm, / BC / = 55 mm, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$;
e) a = 4,5 cm, $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, v = 3 cm;
f) c = 5 cm, $\gamma = 67{,}5°$, $\delta = 90°$, v = 25 mm;
g) a = 4 cm , $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$, v = 3,5 cm;

**Příklad 32 :** Sestrojte rovnoramenný lichoběžník ABCD ( AB//CD ), je-li dáno:
a) a = 6,5 cm, b = 5 cm, $\beta = 60°$;
b) b = 4 cm, c = 4,5 cm, $\beta = 45°$;
c) d = 2,5 cm, a = 5 cm, $\delta = 120°$;
d) a = 8 cm, b = 7 cm, c = 4 cm;

**Příklad 33 :** Sestrojte pravoúhlý lichoběžník ABCD ( AB // CD ), je-li dáno :
a) a = 6 cm, b = 5 cm, úhel ABC je 45°;
b) $\alpha = 90°$, a = 6 cm, b = 4 cm, c = 4 cm;

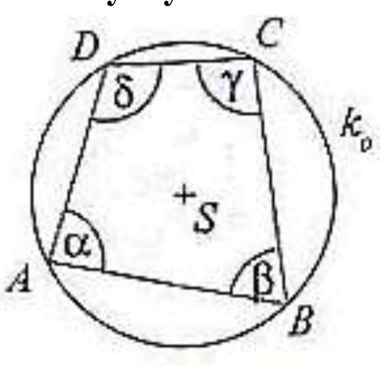
# 6.6 Zvláštní případy čtyřúhelníků :

**Deltoid** je čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé a jedna z nich ( hlavní ) prochází středem druhé ( vedlejší ) úhlopříčky.



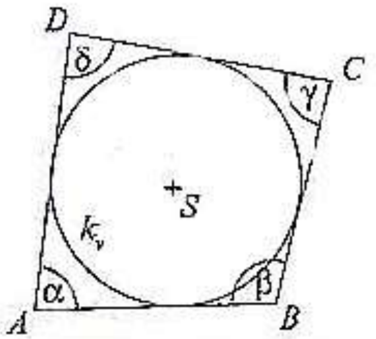

A, B, C, D, vrcholy deltoidu
a, b, strany deltoidu
e, f, úhlopříčky deltoidu
$\rho$ poloměr kružnice vepsané
O = 2.( a + b ) obvod deltoidu
S = 0,5.ef obsah deltoidu
přímka BD osa souměrnosti deltoidu

**Tětivový čtyřúhelník**




Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici.
jeho stranami jsou tětivy opsané kružnice.
Platí : $\alpha + \gamma = \beta + \delta$
Bod S je průsečík os stran.

**Tečnový čtyřúhelník**



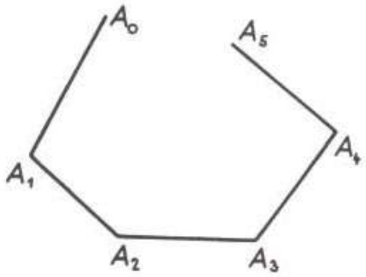

Tečnový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici.
Jeho strany leží na tečnách k vepsané kružnici.
Platí : a + c = b + d
Bod S je průsečík os úhlů.

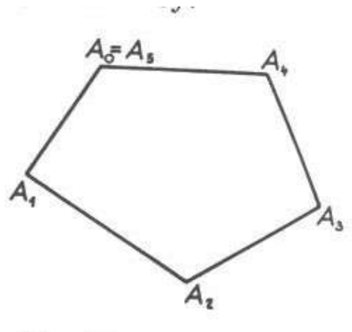
**Příklad 34 :**
a) Sestrojte deltoid ABCD a = b = 6 cm, c = d = 2,5 cm, /BD/ = 8 cm
b) Sestrojte tětivový čtyřúhelník ABCD určený kružnicí k ( S; 4 cm),
a = 5 cm, b = 6 cm, c = 3 cm.

# 6.7 Mnohoúhelník

### 6.7.1 Mnohoúhelník

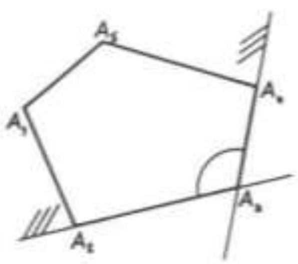
**Lomená čára** je množina úseček, kde koncový bod jedné je počátečním bodem druhé. Rozlišujeme **lomenou čáru neuzavřenou** a **uzavřenou**.



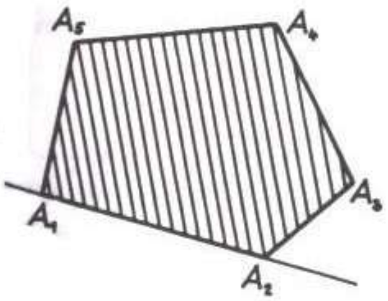

**Mnohoúhelník** je část roviny, ohraničená uzavřenou lomenou čarou, přičemž žádné dvě úsečky lomené čáry se neprotínají.

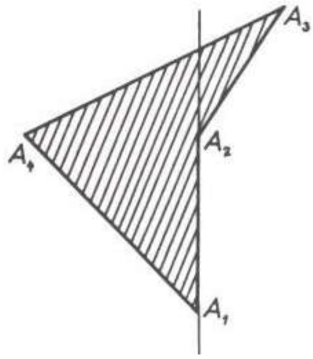
**Vnitřní úhel mnohoúhelníka**



**Konvexní mnohoúhelník** je takový, jehož všechny vnitřní úhly jsou konvexní.

**Nekonvexní mnohoúhelník** je takový, který má alespoň jeden vnitřní úhel nekonvexní.




**Počet úhlopříček** v n-úhelníku : $\frac{n.(n-3)}{2}$

**Součet velikostí všech vnitřních úhlů** konvexního n-úhelníka se rovná
( n – 2 ) . 180°

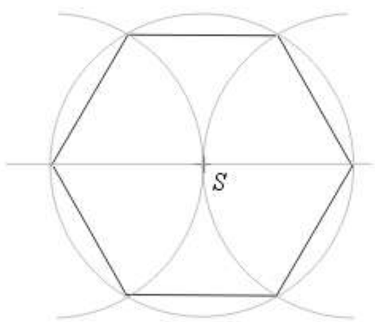
**Pravidelný mnohoúhelník** je takový mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé.

### 6.7.2. Pravidelný šestiúhelník

Skládá se ze šesti rovnostranných trojúhelníků.
Jeho vnitřní úhly mají velikost 120°.
Všechny jeho strany jsou stejně dlouhé.
Všechny jeho úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
Všechny jeho vrcholy leží na kružnici, jejíž střed leží v průsečíku úhlopříček.

**Konstrukce pravidelného šestiúhelníku :**

a) **konstrukce libovolného pravidelného šestiúhelníku** :
V kružnici narýsujeme libovolný průměr, který protne kružnici ve dvou bodech – dva vrcholy šestiúhelníku. Stejným poloměrem, jako je poloměr kružnice, protneme kružnici dvěma oblouky kružnic opsaných kolem průsečíků poloměru s danou kružnicí – dostaneme zbývající čtyři vrcholy šestiúhelníku.




b) **konstrukce pravidelného šestiúhelníka, u kterého známe délku strany** :

Postup je stejný jako v předcházejícím příkladě, ale poloměr první kružnice při konstrukci musí mít stejnou velikost jako je velikost strany budoucího pravidelného šestiúhelníka.

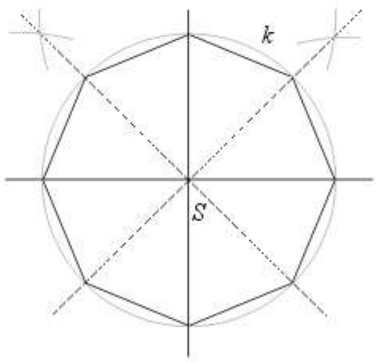
**Příklad 35 :** Dokažte, že pravidelný šestiúhelník se skládá ze šesti shodných trojúhelníků.

### 6.7.3. Pravidelný osmiúhelník

Skládá se z osmi rovnoramenných trojúhelníků.
Jeho vnitřní úhly jsou shodné.
Všechny jeho strany jsou stejně dlouhé.
Všechny jeho úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
Všechny jeho vrcholy leží na kružnici, jejíž střed leží v průsečíku úhlopříček.

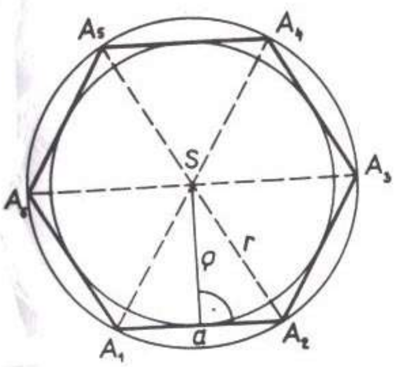
**Konstrukce pravidelného osmiúhelníku**

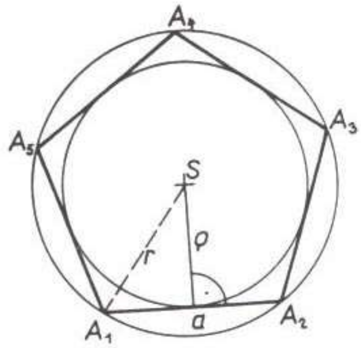
a) **konstrukce libovolného pravidelného osmiúhelníku** :
V kružnici k narýsujeme dva navzájem kolmé průměry, které protnou kružnici ve čtyřech bodech – vrcholech osmiúhelníku. Potom narýsujeme dvě osy úhlů, které protnou kružnici v dalších čtyřech vrcholech osmiúhelníku.




b) **konstrukce pravidelného osmiúhelníka, u kterého známe délku strany** :
Narýsujeme úsečku AB o velikosti strany pravidelného osmiúhelníka. Doplníme na trojúhelník ABS, kde úhel SAB a úhel ABS mají velikost $67^0$ 30´. Narýsujeme kružnici k, která je určena bodem S a poloměrem SA. Průsečík přímky AS s kružnicí k je bod E. Průsečík přímky BS s kružnicí k je bod F. Průsečík přímky kolmé na přímku AE procházející bodem S s kružnicí k jsou body C a G. Průsečík přímky kolmé na přímku BF procházející bodem S s kružnicí k jsou body D a H.

Každému pravidelnému mnohoúhelníku lze **opsat i vepsat kružnici.**

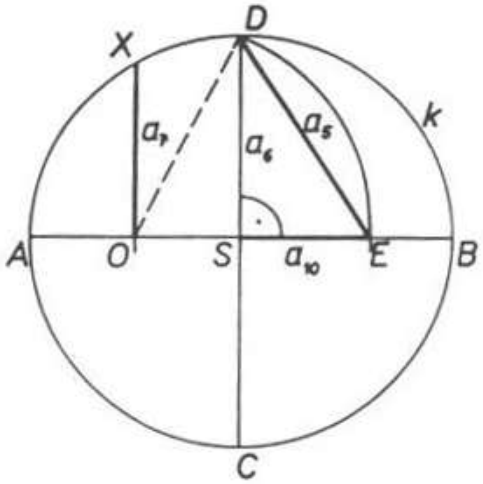



### 6.7.4. Pravidelný n- úhelník

**Příklad :** Je dána kružnice k, která je určena středem S a poloměrem r.
Narýsujte stranu pravidelného : a) pětiúhelníka;
b) šestiúhelníka;
c) desetiúhelníka,
který je kružnici vepsaný.

Řešení : 1) sestrojíme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem r;
2) sestrojíme dva k sobě kolmé průměry AB a CD;
3) bod O je střed úsečky AS;
4) sestrojíme kružnici l určenou bodem O a s poloměrem OD;
5) průnik l s SB je bod E;

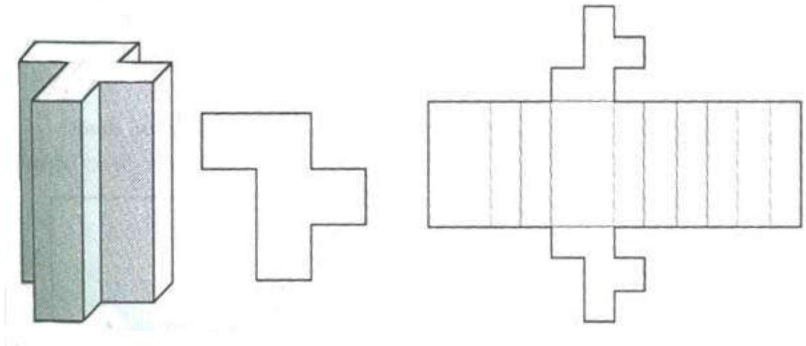



/DE/ je velikost strany pravidelného pětiúhelníka;
/SD/ je velikost strany pravidelného šestiúhelníka;
/SE/ je velikost strany pravidelného desetiúhelníka.

Poznámka : průnik kružnice k s kolmicí na stranu AB procházející bodem O označíme jako bod X. Úsečka XO je přibližná velikost strany pravidelného sedmiúhelníka vepsaného kružnici k.

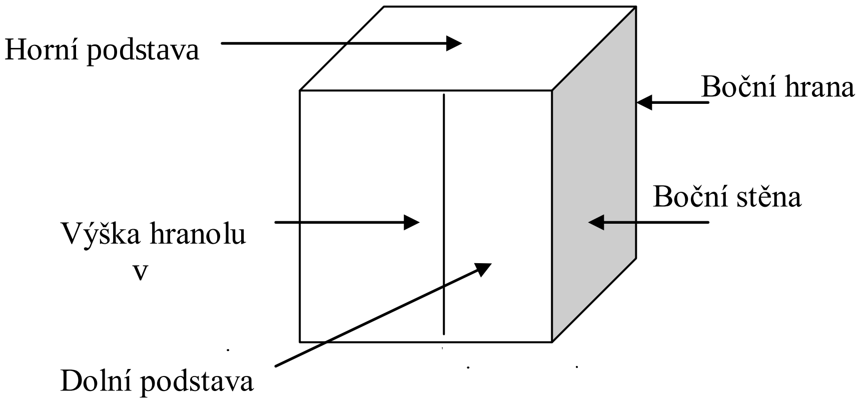
# 6.8 Hranol

## 6.8.1. Základní pojmy



hranol podstava síť hranolu

**Základní pojmy :**




**Hranol** je těleso, které má dvě shodné rovnoběžné podstavy ( horní, spodní ).
**Kolmý hranol** má boční stěny kolmé na podstavy. Tento typ hranolů budeme označovat zkráceně **hranol.**
**Kosý hranol** nemá boční stěny kolmé na podstavy. Tento typ hranolů není náplní učiva základní školy.

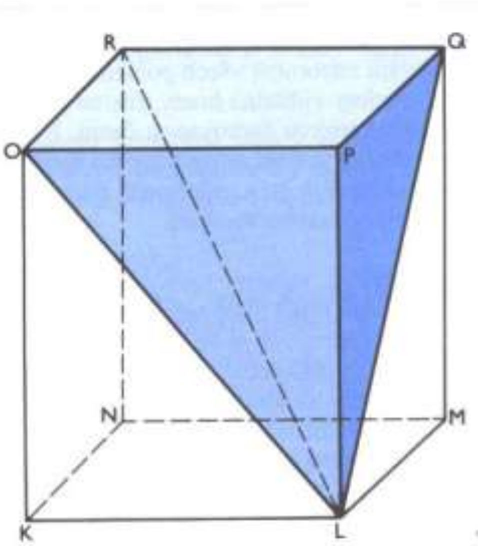
Podle tvaru podstavy ( n- úhelník ) rozlišuje hranoly ( n- boký hranol ).
Hranol tříboký, čtyřboký, pětiboký, …..

Je-li podstavou pravidelný n- úhelník, pak hovoříme o **pravidelném n- bokém hranolu.**

**Výška hranolu** je vzdálenost dvou rovnoběžných podstav ( třetí rozměr hranolu ).

Vrcholy hranolu popisujeme :

a) vrcholy horní podstavy stejně jako vrcholy dolní podstavy ležící na stejné výšce, ale s čárkou, např A, A´;
b) při popisování vrcholů horní podstavy pokračujeme v abecedě tam, kde jsme skončili při popisování dolní podstavy. V horní podstavě začínáme popisovat jako první ten vrchol, který je na stejné výšce, jako je vrchol dolní podstavy, kde jsme začali popisovat vrcholy.




**Úhlopříčky hranolu :**

- **stěnová úhlopříčka** – úhlopříčka v podstavě nebo ve stěně pláště( např.. LN, LQ )
- **tělesová úhlopříčka** – úsečka spojující vrchol jedné podstavy hranolu s vrcholem druhé podstavy, která neleží ve stěně hranolu ( např. RL; QK; PN; OM )

Boční stěny tvoří **plášť hranolu**.

Plášť hranolu se skládá z n obdélníků, které mají rozměry : výška tělesa, podstavná hrana

### 6.8.2. Výpočet objemu a povrchu hranolu

**Povrch hranolu** $S = 2 \cdot S_P + S_{Pl}$ kde $S_P$ je obsah podstavy
$S_{Pl}$ je obsah pláště

$S_{Pl} = O_P \cdot v$ kde $O_P$ je obvod podstavy

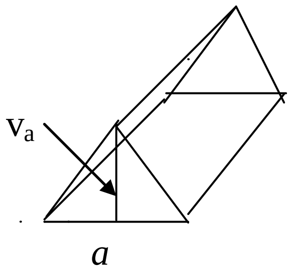
**Objem hranolu** $V = S_P \cdot v$

Čtyřboký hranol označujeme také pojmem **kvádr.**
Pravidelný čtyřboký hranol označujeme také pojmem **krychle.**

| | | |
|---|---|---|
| **Kvádr** | **S = 2 . ( ab + bc + ac )** | **V = a . b . c** |
| **Krychle** | **S = 6 . a . a** | **V = a . a . a** |

**Příklad :** Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu, platí-li a = 5 cm, c = 4 cm.
Řešení : S = 2 . ( ab + bc + ac ) V = a . b . c
S = 2 . ( 5.5 + 5.4 + 5.4 ) V = 5 . 5 . 4
**$S = 130\ cm^2$** **$V = 100\ cm^3$**

**Příklad :** Pravidelný trojboký hranol má délku podstavné hrany 6 cm a výšku 10 cm. Vypočtěte jeho povrch a objem.
Řešení :




$v_a{}^2 = a^2 - (1/2\ a)^2$
$v_a{}^2 = 6^2 - 3^2$
$v_a{}^2 = 36 - 9$
$v_a{}^2 = 27$
$\underline{v_a = 5{,}2\ cm}$

$S = 2.\ S_p + S_{pl}$
$S = 2.\ (\ a.\ v_a\ ) : 2 + 3\ a.\ v$
$S = 2.\ (\ 6.\ 5{,}2) : 2 + 3\ .\ 6\ .\ 10$
$\mathbf{S = 211{,}2\ cm^2}$

$V = S_p\ .\ v$
$V = 15{,}6\ .10$
$\mathbf{V = 156\ cm^3}$

Povrch hranolu je 211,2 $cm^2$ a objem je 156 $cm^3$ .

**Příklad 36 :** Vypočtěte objem a povrch tříbokého hranolu, platí-li :
a) podstavou je rovnoramenný trojúhelník se základnou 0,8 m, příslušnou výškou $v_a$ = 0,4 m a výškou hranolu v = 4 m;
b) podstavou je rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou /AB/ = 3 cm, ramenem /BC/ = 2,5 cm a výška hranolu v = 5 cm;
c) podstavou je pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 13 cm a jednou odvěsnou 12 cm, výška hranolu je 5 cm;

**Příklad 37 :** Vypočtěte objem a povrch čtyřbokého hranolu, platí-li :
a) podstavou je kosočtverec se stranou a = 6 cm a příslušnou výškou
$v_a$ = 4,6 cm, výška hranolu je 8 cm;
b) podstavou je rovnoramenný lichoběžník se základnami o délkách 8 cm
a 4 cm, rameny délky 6 cm, výška hranolu je 5 cm;

### 6.8.3. Opakování učiva 6. ročníku ( krychle, kvádr ).

**Příklad 38 :** Vypočtěte objem a povrch kvádru, platí-li :
**a)** a = 8 cm, b = 4,5 cm, c = 12 cm;
b) a = 1,5 dm, b = 2 dm, c = 8 m;
c) a = 1,2 m, b = 1,8 m, c = 8 dm;

**Příklad 39 :** Vypočtěte objem a povrch krychle, platí-li :
a) a = 7 m; b) a = 8,4 cm; c) a = 3,5 cm; d) a = 2,8 cm;

**Příklad 40 :** Vypočtěte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu :
a) a = 4 cm; v = 5 cm;
b) Op = 36 cm; v = 5 cm;

**Příklad 41 :** Objem čtyřbokého hranolu je 288 $cm^3$, podstavou je obdélník s rozměry 6 cm a 4,8 cm. Vypočtěte : a) výšku hranolu;

b) povrch hranolu;

**Příklad 42 :** Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, jestliže je dáno :
a) $O_{ABCD}$ = 28,8 cm, v = 1,4 cm;
b) $S_{ABCD}$ = 10,89 cm$^2$, $S_{ABB´A´}$ = 13,2 cm$^2$;
c) $O_{ABCD}$ = 3,2 cm, $O_{ABB´A´}$ = 39 cm;
d) $S_{ABCD}$ = 9 cm$^2$, $S_{ABCD}$ : $S_{ABB´A´}$ = 3 : 5;

**Příklad 43 :** Vypočtěte délku hrany AB pravidelného trojbokého hranolu ABCA´B´C´, jestliže je dáno :
a) objem hranolu rovná 27. $\sqrt{3}$ cm$^3$ a /AB/ : /AA´/ = 2;
b) $S_{PL}$ = 108 cm$^2$, /AA´/ = 2 cm;
c) $S_{PL}$ = 48 cm$^2$, /AB/ : /AA´/ = 1;

**Příklad 44 :** Vypočtěte obsah pláště čtyřbokého hranolu, který má podstavu rovnoramenný lichoběžník. Součet délek všech hran je 58 cm a obvod podstavy je 9 cm.

**Příklad 45 :** Bazén má tvar kvádru s podstavou délky 20 m a šířky 10 m a s hloubkou 2 m.
a) Kolik m$^2$ obkladaček je třeba na obložení dna a stěn bazénu ?
b) Za jak dlouho se bazén naplní tak, aby byla hladina vody vzdálena 10 cm od horního okraje bazénu, jestliže jediným přívodem přitéká do bazénu 1,9 hl vody za minutu ?

**Příklad 46 :** Plocha přívěsu je 4,1 m a 1,96 m. Kolik m$^3$ písku můžeme maximálně na přívěs naložit, jsou-li bočnice do výšky 24 cm ?

**Příklad 47 :** Kolik cihel bylo třeba na výstavbu čtyř zdí garáže o šířce 30 cm, jestliže na 1 m$^3$ zdi se spotřebuje 290 cihel ? Rozměry podlahy garáže jsou 2,9 m a 5,4 m; výška garáže je 2,5 m a vrata mají rozměry 2,4 m a 2,1 m.

**Příklad 48 :** Výška hranolu je 7,5 dm. Jeho podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky 6 dm. Vypočtěte délky zbývajících stran podstavy, víte-li, že objem hranolu je 180 dm$^3$.

# 6.9 Pravoúhlé promítání hranolu do jedné průmětny

## 6.9.1. Základní pojmy

Body v prostoru, rovinné útvary a tělesa umístěná v prostoru lze zobrazit do roviny ( **průmětna** – $\pi$ ).

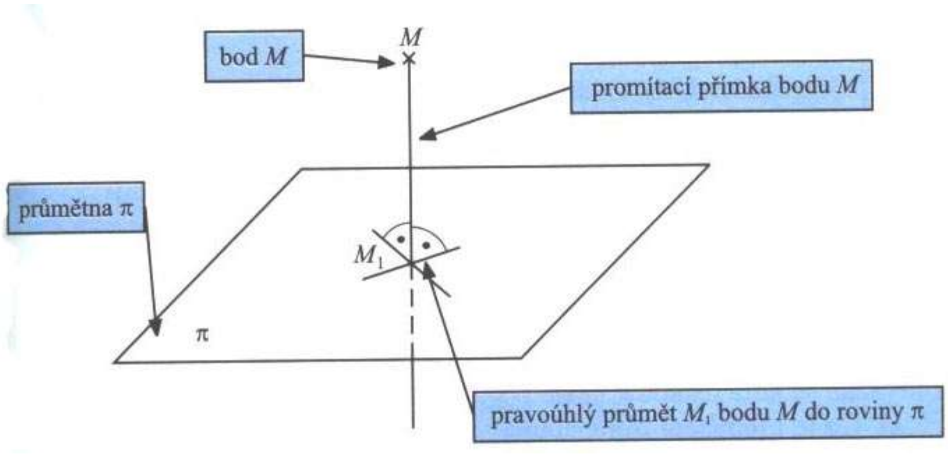
**Promítací přímky** jsou rovnoběžné přímky, které procházejí body v prostoru, které chceme zobrazit.

**Pravoúhlé ( rovnoběžné ) promítání** je takové promítání, kdy promítací přímky jsou kolmé na průmětnu.

**Průmět bodu** je průsečík promítací přímky, která prochází daným bodem prostoru s průmětnou.

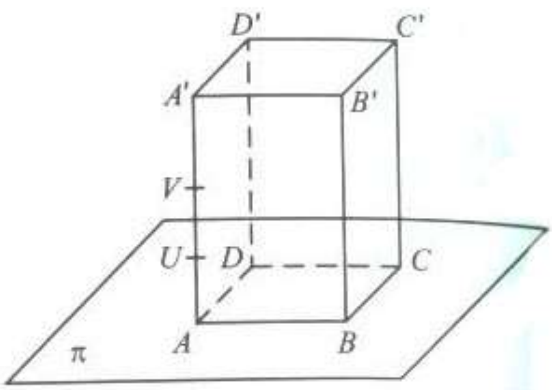
**Promítací rovina** je kolmá rovina k π, která prochází přímkou, která je různoběžná s rovinou π.

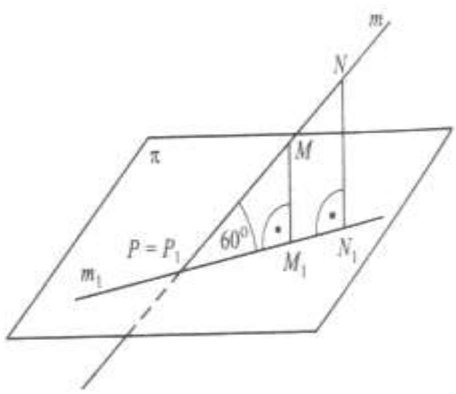
**Průsečnice** je průnik promítací roviny a roviny π.




## 6.9.2. Zobrazení přímky

**Zobrazení přímek ( úseček )** v prostoru, které jsou s rovinou průmětny :
a) kolmé ;
b) rovnoběžné ;
c) leží v průmětně ;
d) různoběžných.




Podstava hranolu ABCD leží v rovině π.

a) úsečka AA´je kolmá na π – pravoúhlým průmětem AÁ je bod $A_1$ totožný s bodem A**;**
b) úsečka A´B´ je rovnoběžná s π – pravoúhlým průmětem A´B´ je úsečka $A_1B_1$, totožná s AB;
c) úsečka AB leží v π – pravoúhlým průmětem AB je úsečka $A_1B_1$, která je totožná s AB;
d) úsečka MN je různoběžná s rovinou π – pravoúhlým průmětem MN je úsečka $M_1N_1$.

## 6.9.3. Zobrazení roviny

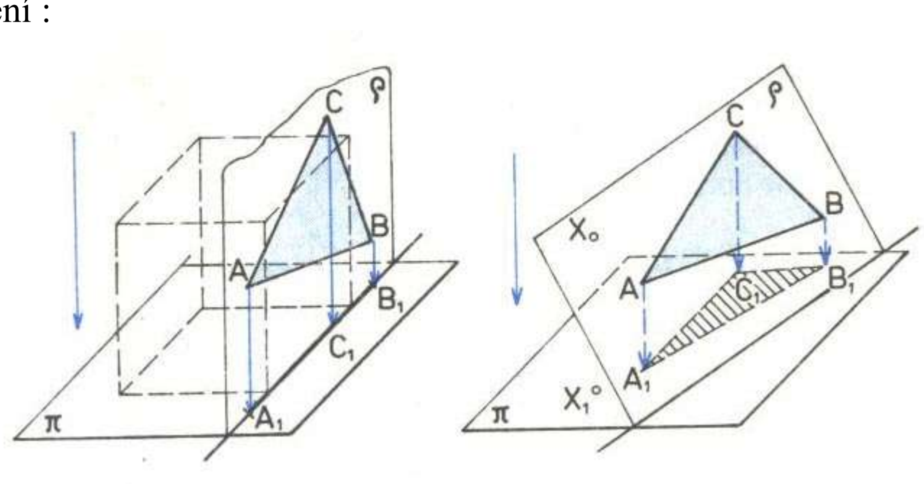
**Zobrazení roviny**, která je : a) kolmá na průmětnu;
b) rovnoběžná s průmětnou;
c) totožná s průmětnou;
d) různoběžná s průmětnou.

( pro lepší představivost využijte posledního obrázku )

a) rovina ABB´A´je kolmá na π – pravoúhlým průmětem této roviny je přímka AB;
b) rovina A´B´C´D´je rovnoběžná s π – pravoúhlým průmětem této roviny je rovina π;
c) rovina ABCD je totožná s π – pravoúhlým průmětem této roviny je tatáž rovina;
d) rovina A´B´C´D je různoběžná s rovinou π – pravoúhlým průmětem této roviny je rovina π.

**Příklad :** Určete pravoúhlý průmět trojúhelníka ABC, který leží v :
a) v rovině kolmé k π;
b) v rovině různoběžné s rovinou π.

Řešení :

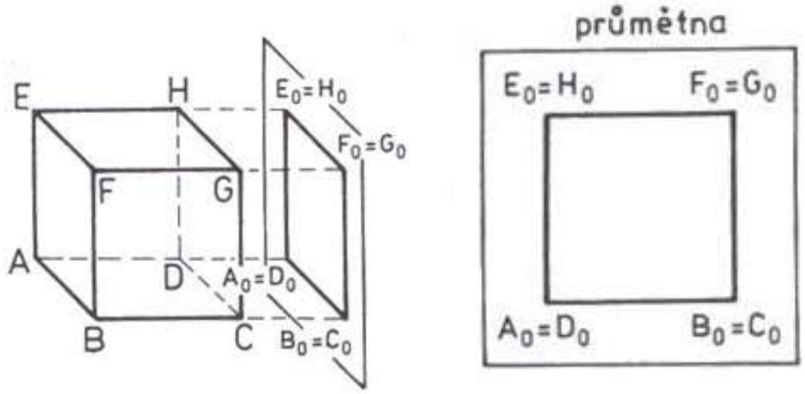


a) Pravoúhlým průmětem trojúhelníka ABC ležící v kolmé rovině je úsečka.
V našem případě úsečka $A_1B_1$.
b) Pravoúhlým průmětem trojúhelníku ABC ležící v rovině, která není kolmá, je trojúhelník. V našem případě $A_1B_1C_1$, který má menší obsah než trojúhelník ABC. Vztah mezi velikostí obrazu a pravoúhlého průmětu je dán sklonem roviny, ve které leží obraz, vzhledem k rovině π.

### 6.9.4. Zobrazení těles

**Příklad :** Určete pravoúhlý průmět krychle, jejíž jedna stěna je rovnoběžná s rovinou.

Řešení :



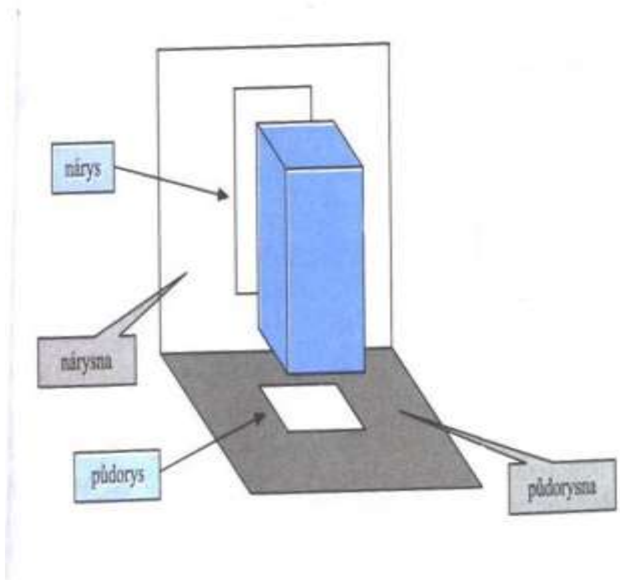

**Příklad 49 :** Určete pravoúhlý průmět trojúhelníka ABC, který leží v rovině rovnoběžné s rovinou π.

# 6.10 Pravoúhlé promítání hranolu na dvě k sobě kolmé průmětny

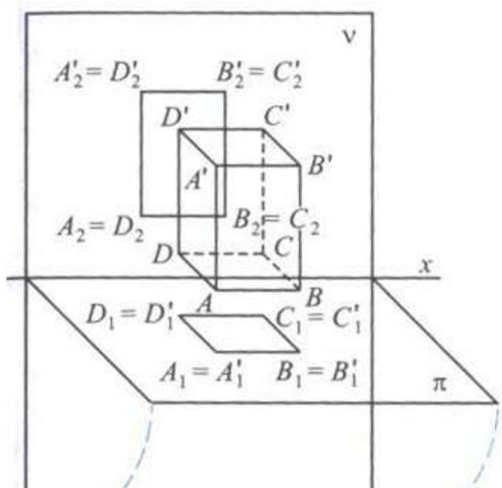
### 6.10.1. Základní pojmy

**Půdorysna** ( první průmětna ) – π
**Nárysna** ( druhá průmětna ) – ν  ( ný)

Půdorysna je kolmá na nárysnu.




Princip zobrazování bodů prostoru do půdorysna a nárysny je stejný jako zobrazování do jedné roviny.



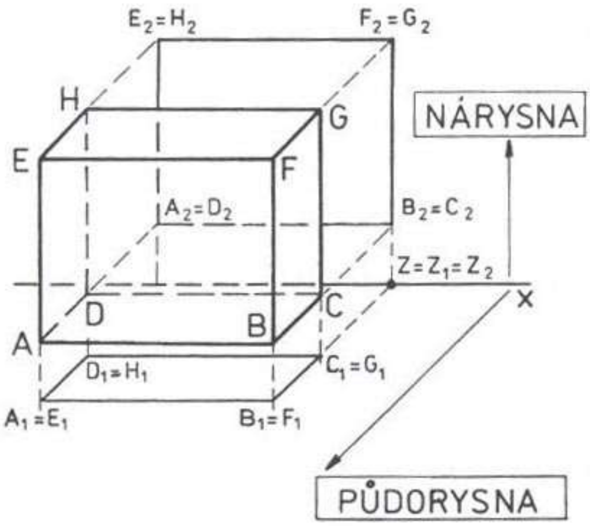

Průsečnicí půdorysny a nárysny je přímka x.
Průměty bodů prostoru v půdorysně indexujeme číslem 1.
Průměty bodů prostoru v nárysně indexujeme číslem 2.

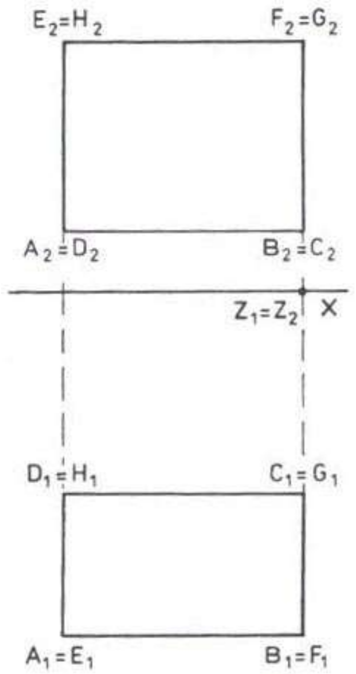
Průmět tělesa do půdorysny nazýváme **půdorys** a do nárysny nazýváme **nárys.**

V praxi při konstrukci průmětů bodu v jedné rovině ( otočením například roviny $\pi$ okolo přímky x do roviny v ) říkáme, že jsme **oba průměty sdružili.**

První a druhý průmět jakéhokoliv bodu musí **ležet na kolmici k přímce** x .

## 6. 10.2. Vzdálenost bodu od průmětny



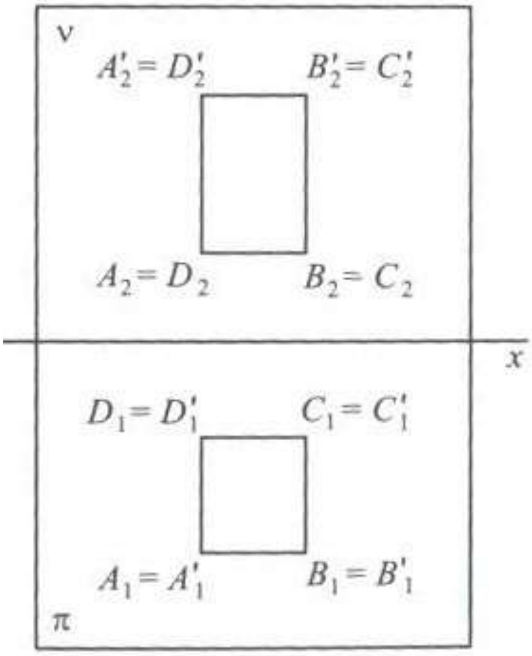




Bod C je vzdálen od nárysny velikostí úsečky $C_1Z_1$.
Bod C je vzdálen od půdorysny velikostí úsečky $C_2Z_2$.

## 6.10.3 Zobrazení těles

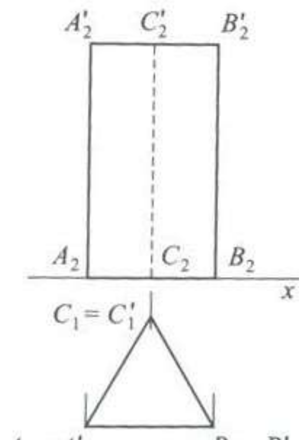
**Příklad :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod A je vzdálen 6,5 cm od nárysny a 2 cm od půdorysny;
podstava hranolu je rovnoběžná s půdorysnou;
hrana podstavy AB je rovnoběžná s nárysnou.

Řešení :




**Příklad 50 :** Jakým způsobem se změní zobrazení pravidelného čtyřbokého hranolu z předcházejícího příkladu, aby :
a) $A_2B_2$ byla totožná s průsečnicí nárysny a půdorysny;
b) $D_1C_1$ byla totožná s průsečnicí nárysny a půdorysny;
c) $A_2B_2$ byla totožná s $D_1C_1$ a ta byla totožná s průsečnicí nárysny a půdorysny.

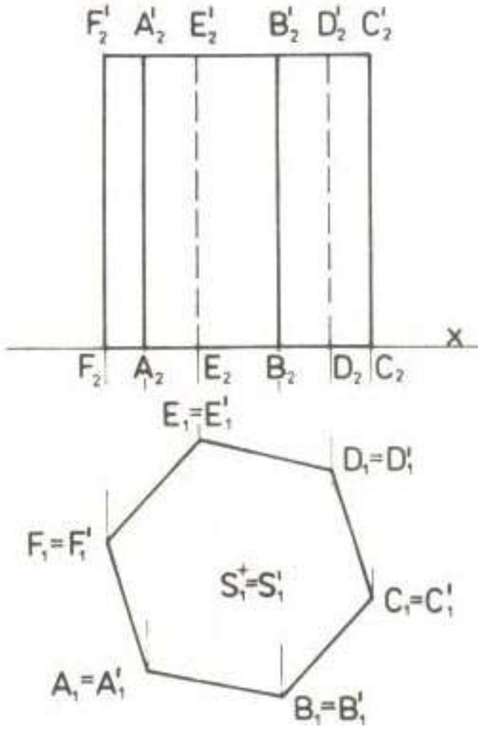
**Příklad :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného tříbokého hranolu ABCA´B´C´, jehož spodní podstava leží v půdorysně, hrana AB je rovnoběžná s nárysnou, vrchol C je blíž nárysně než vrchol A. /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 5 cm.
Řešení :




Při pohledu zepředu **nebudeme vidět hranu** CC´ a proto v nárysně průmět této hry ( $C_2C'_2$ ) **je rýsován čárkovaně.**

**Příklad :** Narýsujte pravidelný šestiboký hranol, který má rozměry : podstavná hrana a = 4 cm, výška hranolu v = 8 cm. Hranol je umístěn v půdorysně, k nárysně je nejbližší hrana EE´, nejvzdálenější je hrana BB´, podstavná hrana DE svírá s nárysnou úhel 30º.

Řešení :




**Příklad 51 :** Zobrazte pravoúhlé průměty krychle ABCDA´B´C´D´ o hraně 3 cm, která :
a) jedna stěna leží v půdorysně a druhá v nárysně;
b) jedna stěna leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti 1cm a druhá stěna leží v nárysně;
c) jedna stěna leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti 1,5cm a druhá stěna leží v rovině rovnoběžné s nárysnou ve vzdálenosti 2 cm;
d) jedna stěna leží v půdorysně a kolmá hrana na tuto stěnu leží v nárysně;
e) jedna stěna leží v půdorysně a kolmá hrana na tuto stěnu leží v rovnoběžné rovině vzdálené 1,5 cm .

**Příklad 52 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod A je vzdálen 6,5 cm od nárysny
spodní podstava hranolu je leží v půdorysně;
hrana podstavy AB je rovnoběžná s nárysnou.

**Příklad 53 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod A je vzdálen 10 cm od nárysny, bod D je nárysně blíž;
spodní podstava hranolu je rovnoběžná s půdorysnou ve vzdálenost 2 cm;
hrana podstavy AB svírá s nárysnou úhel 45º.

**Příklad 54 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod D leží v nárysně;
spodní podstava hranolu leží v půdorysně;
hrana podstavy AB svírá s nárysnou úhel 45º.

**Příklad 55 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod D leží v nárysně;
spodní podstava hranolu je rovnoběžná s půdorysnou ve vzdálenost 2 cm;
hrana podstavy AB svírá s nárysnou úhel 45º.

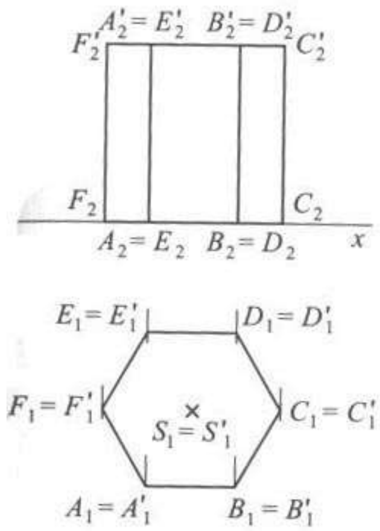
**Příklad 56 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného tříbokého hranolu ABCA´B´C´, jehož spodní podstava leží v půdorysně, hrana AB svírá s nárysnou 50º, vrchol C je blíž nárysně než vrchol A. /AB/ = 4 cm,
/AA´/ = 5 cm.

**Příklad 57 :** Zobrazte pravoúhlé průměty tříbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 3 cm, 4 cm, a výškou tělesa 8 cm, je-li umístění hranolu toto :
a) spodní podstavou je pravoúhlý trojúhelník, který leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti 1 cm, hrana AB je rovnoběžná s nárysnou ve vzdálenosti 1,5 cm, vrchol C má vzdálenost větší než od nárysny než vrchol A;
b) spodní podstavou je pravoúhlý trojúhelník, který leží v půdorysně, vrchol C leží v nárysně, hrana AB je rovnoběžná s nárysnou a leží před nárysnou;
c) spodní podstavou je pravoúhlý trojúhelník, který leží v půdorysně, vrchol C leží v nárysně, hrana AB svírá s nárysnou 40º a leží před nárysnou;
d) těleso leží na největší boční stěně, která je v půdorysně, dolní podstava ABC leží v rovině nárysny, horní podstava je před ní;
e) těleso leží na největší boční stěně, která je v rovnoběžné rovině 2 cm nad půdorysnou, dolní podstava ABC leží v rovině nárysny, horní podstava před ní;
f) těleso leží na největší boční stěně, která je v rovnoběžné rovině 2 cm nad půdorysnou, spodní podstava ABC leží v rovnoběžné rovině 1 cm od nárysny, body horní podstavy mají od nárysny vzdálenost větší .

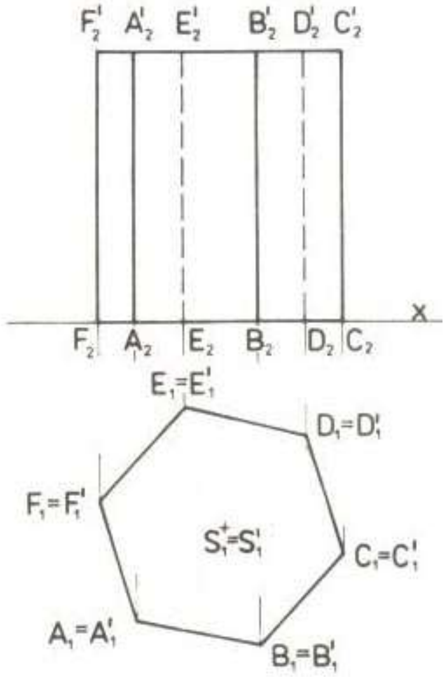
**Příklad 58 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného šestibokého hranolu, který má velikost podstavné hrany 3,5 cm a výšku 6 cm a je umístěný takto :
a) spodní podstavou tělesa je šestiúhelník leží v půdorysně, podstavná hrana EF leží v nárysně, ostatní body šestiúhelníka A, B, C, D leží před nárysnou;
b) spodní podstavou tělesa je šestiúhelník leží v rovnoběžné rovině 1 cm od půdorysny, podstavná hrana EF leží v nárysně, ostatní body šestiúhelníka A, B, C, D leží před nárysnou;
c) spodní podstavou tělesa je šestiúhelník leží v rovnoběžné rovině 1 cm od půdorysny, podstavná hrana EF leží v rovnoběžné rovině 2 cm od nárysny, ostatní body šestiúhelníka A, B, C, D leží před nárysnou;

d) spodní podstavou tělesa je šestiúhelník leží v rovnoběžné rovině 1,5 cm od půdorysny, boční hrana EE´ leží v nárysně, ostatní body šestiúhelníka A, C, D, F leží před nárysnou, bod B má největší vzdálenost ze všech bodů podstavy od nárysny;
e) spodní podstavou tělesa je šestiúhelník leží v rovnoběžné rovině 1 cm od půdorysny, boční hrana EE´ leží v rovnoběžné rovině 2 cm od nárysny, ostatní body šestiúhelníka A, C, D, F leží před nárysnou, bod B má největší vzdálenost ze všech bodů podstavy od nárysny;
f) těleso leží na své boční stěně ABB´A´ v půdorysně, spodní postavu hranolu ABCDEF leží v nárysně, horní podstava je před nárysnou;
g) těleso leží na své boční stěně ABB´A´ v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti 1 cm, spodní postavu hranolu ABCDEF leží v nárysně, horní podstava je před nárysnou;
h) těleso leží na své boční stěně ABB´A´ v rovině rovnoběžné s půdorysnou ve vzdálenosti 1 cm, spodní postavu hranolu ABCDEF leží v rovnoběžné rovině
2 cm od nárysny, horní podstava je před nárysnou;

**Příklad 59 :** Popište těleso a jeho umístění v prostoru.



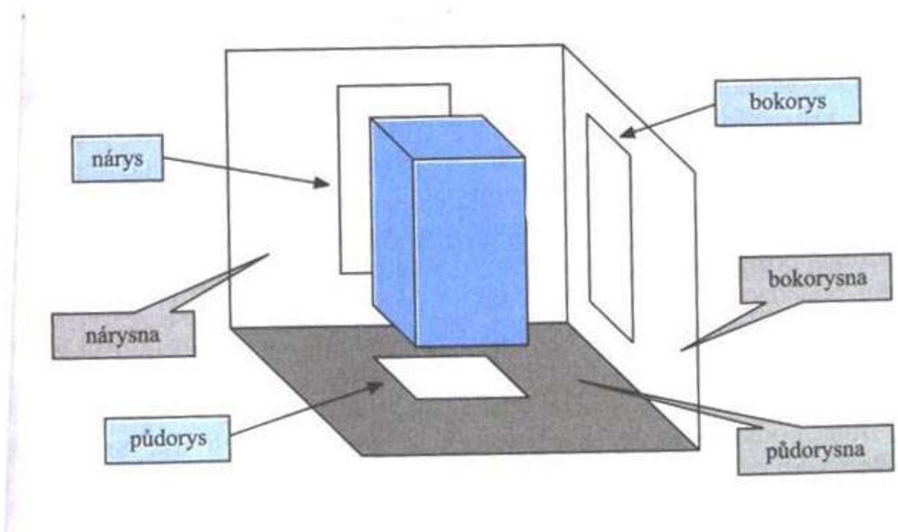

**Příklad 60 :** Popište těleso a jeho umístění v prostoru.




# 6.11 Pravoúhlé promítání hranolu na tři k sobě kolmé průmětny

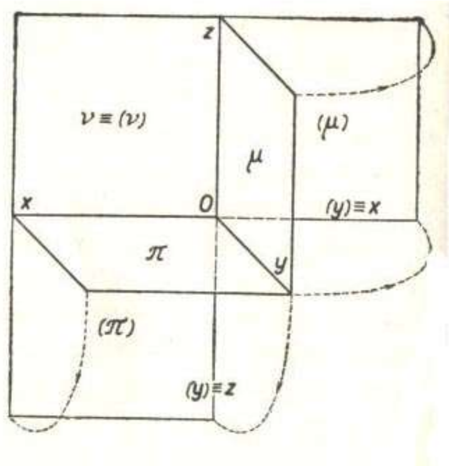
## 6.11.1. Základní pojmy

Přidáme-li k zobrazení na dvě k sobě kolmé průmětny třetí rovinu, která je kolmá na obě předcházející roviny( **bokorysna )** , hovoříme o **pravoúhlém promítání na tři k sobě kolmé průměty.**

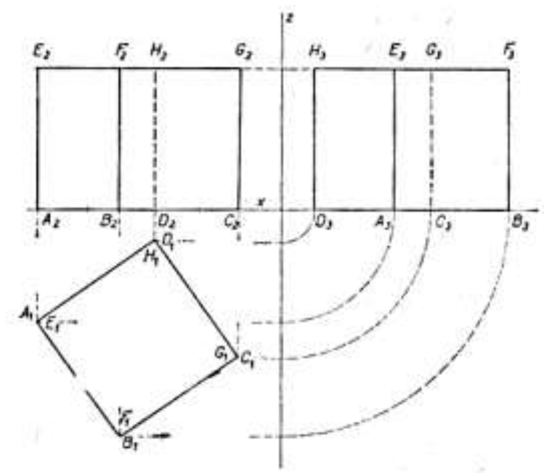



Průměty bodu v bokorysně indexujeme číslem 3.

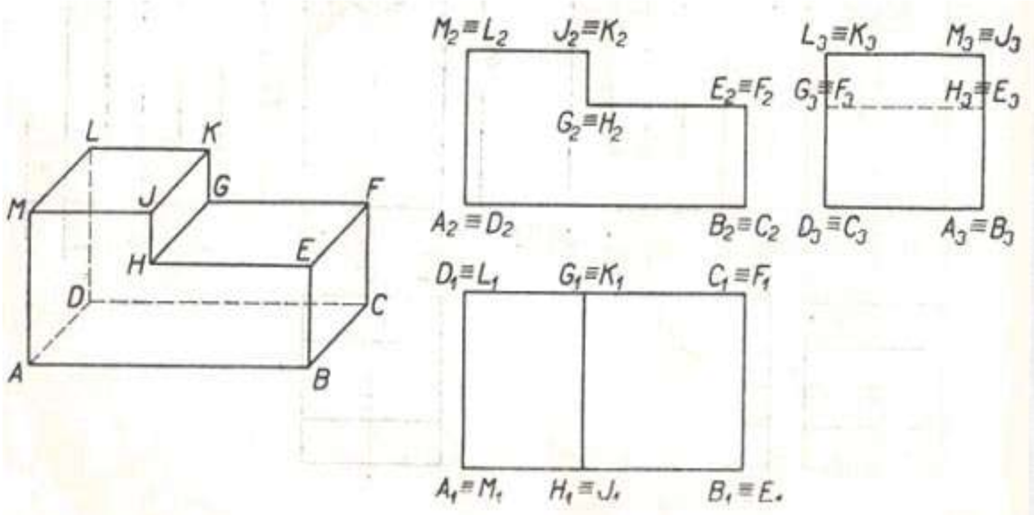
Jiné znázornění zavedení třetí roviny ( bokorysy ), kterou budeme značit řeckým písmenem μ ( čteme mí )




**Příklad :** Zobrazte tři pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDEFGH, jehož dolní podstava ABCD leží v rovině půdorysu, hrana CD svírá s bokorysnou úhel $50^0$, vrchol C leží 7 cm od nárysny a 1 cm do bokorysy, k nárysně je nejblíže hrana DH. Hrana podstavy měří 5 cm, výška hranolu je
6,5 cm.
Řešení : 1) bod $C_1$;
2) půdorys;
3) nárys;
4) bokorys;
5) viditelnost hran a vytažení tělesa.



**Příklad :** Ve volném rovnoběžném promítání je zobrazeno těleso ABCDEFGHJKLM. Zobrazte toto těleso pomocí tří navzájem kolmých rovin.
Rozměry a umístění tělesa v prostoru si zvolte sami.
Řešení :




**Příklad 61 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 2 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod A je vzdálen 6,5 cm od nárysny, 2 cm od půdorysny a 3 cm od bokorysny;
podstava hranolu je rovnoběžná s půdorysnou;
hrana podstavy AB je rovnoběžná s nárysnou.

**Příklad 62 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného tříbokého hranolu ABCA´B´C´, jehož spodní podstava leží v půdorysně, hrana AB je rovnoběžná s nárysnou, vrchol C je blíž nárysně než vrchol A. /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 5 cm,
vrchol podstavy B leží v bokorysně.

**Příklad 63 :** Narýsujte pravidelný šestiboký hranol, který má rozměry : podstavná hrana a = 4 cm, výška hranolu v = 8 cm. Hranol je umístěn v půdorysně, k nárysně je nejbližší hrana EE´, nejvzdálenější je hrana BB´, podstavná hrana DE svírá s nárysnou úhel 30°, nejbližší boční hrana je 1 cm vzdálena od bokorysy.

**Příklad 64 :** Zobrazte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého hranolu ABCDA´B´C´D´, /AB/ = 4 cm, /AA´/ = 6 cm, který je umístěn v prostoru takto :
bod A je vzdálen 10 cm od nárysny a 8 cm od bokorysny, bod D je nárysně blíž;
spodní podstava hranolu je rovnoběžná s půdorysnou ve vzdálenost 2 cm;

# Souhrnná cvičení

1) Kolik hektolitrů vody se vejde do nádrže tvaru kvádru s rozměry a = 3,5 m, b = 2,5 m, c = 1,4 m?

2) Vypočítejte povrch pravidelného čtyřbokého hranolu o podstavné hraně 12 cm a výšce 75 cm.

3) Kolik zeminy je třeba odstranit při hloubení 200 m dlouhého příkopu, jehož příčný řez je rovnoramenný lichoběžník o základnách 110 cm a 65 cm a hloubce 55 cm?

4) Dřevěný trám délky 4 m má příčný průřez čtverec o straně 15 cm. Vypočítejte objem trámu.

5) Dřevěný trám délky 4 m má příčný průřez čtverec o straně 15 cm. Jakou hmotnost má trám, jestliže 1 $m^3$ dřeva má hmotnost 790 kg ?

6) Nádoba má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah 9,2 $m^2$. V nádobě je 25 hl vody. Do jaké výše sahá voda v nádobě?

7) Splav na omývání řepy je v podstatě hranol s podstavou rovnoramenného trojúhelníku o základně 6,8 m (šířka splavu) a výšce 4,8 m (hloubka splavu); je dlouhý 25 m. Vypočítejte jeho objem.

8) Kolik čtverečních metrů spotřebuje klempíř na výrobu expanzní nádoby ústředního vytápění tvaru krychle nahoře otevřené s hranou délky 75 cm?

9) Korba nákladního auta s rozměry 4 m, 2,5 m a 0,8 m je do tří čtvrtin svého objemu naplněna pískem. Kolik krychlových metrů písku je naloženo?

10) Podstava kvádru má tvar obdélníku s délkou 2,6 m a šířkou 2,2 m. Výška kvádru je jednou osminou obvodu podstavy. Vypočítejte objem a povrch kvádru.

11) O kolik $cm^2$ se liší obsahy lichoběžníka a rovnoběžníka Délka základen lichoběžníka je 11 cm a 7 cm a jejich vzdálenost je 5 cm. Délka strany rovnoběžníka je 15 cm a délka k ní příslušné výšky je 3 cm.

12) Výkop byl dlouhý 38 m, 2,2 m široký a 3 m hluboký. Kolik krychlových metrů zeminy bylo vybagrováno?

13) Výkop byl dlouhý 38 m, 2,2 m široký a 3 m hluboký. Kolik jízd při odvozu zeminy muselo vykonat jedno auto, naložilo-li 4,5 $m^3$ zeminy?

14) Na zahradu s výměrou 800 $m^2$ napršely 3 mm vody. Kolik desetilitrových konví nám tento déšť nahradil?

15) Kolik prken 2,1 m dlouhých a 15 cm širokých se spotřebuje při výrobě stanových podsad a podlážek, které jsou sestaveny do tvaru neúplného kvádru s rozměry 2,1 m, 2,1 m a 0,75 m?

16) Kolikrát je větší obsah rovnoběžníka a = 32 cm; $v_a$ = 14 cm než obsah kosočtverce s úhlopříčkami délek 16 cm a 4 cm ?

17) Kostkový cukr v balení 1 kg je v krabici s rozměry 20 cm, 12 cm a 5 cm.
a) Kolik kostek cukru s rozměry 2,5 cm, 2,5 cm a 1 cm se vejde do krabice?
b) Vypočítejte hmotnost jedné kostky.

c) Kolik čtverečních metrů kartónu je třeba na výrobu 1 000 000 těchto krabic, je-li na výrobu třeba o 40 % více kartónu, než je povrch krabice?

18) Délka strany kosočtverce je 10 cm a délka jeho delší úhlopříčky je 16 cm. Vypočtěte obsah a obvod kosočtverce.

19) Sestrojte lichoběžník ABCD a = e = 6 cm, c = 4 cm, v = 3 cm.

20) Vypočtěte stranu čtverce, který má stejný obsah jako rovnostranný trojúhelník o straně 5 cm.

21) Délky sousedních stran v kosodélníku jsou v poměru 7 : 5. jedna strana kosodélníku je o 5 cm kratší než druhá strana. Vypočtěte obsah čtverce, který má stejný obvod jako daný kosodélník.

22) Obdélník ABCD, jehož délka je 4 krát větší než šířka, má obvod 50 metrů. Vypočtěte obsah lichoběžníku ABKS, kde S je průsečík úhlopříček a bod K je střed strany BC.

23) Vypočtěte obvod kosočtverce, jehož obsah se rovná 4,48 $dm^2$ a jedna jeho úhlopříčka má délku 28 cm.

24) Podstavou hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 5 cm. Obsah největší stěny je 130 $cm^2$, výška tělesa je 10 cm. Vypočtěte objem a povrch tělesa.

25) V krychli ABCDEFGH úhlopříčný řez BFHD podél tělesové úhlopříčky má obsah 344 $cm^2$. Vypočtěte povrch krychle a výsledek v $cm^2$ zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

26) Zmenšíme-li hranu krychle o jednu čtvrtinu její délky, získáme krychli, která má povrch S = 54 $cm^2$. Určete původní hranu krychle a její objem.

27) Akvárium tvaru kvádru má rozměry dna 30 cm a 5,4 dm. Nalijeme-li do něho 48,6 litrů vody, bude sahat do tří čtvrtin jeho výšky. Jaká je výška stěn akvária ?

28) Jaký obvod má čtverec, který má stejný obsah jako lichoběžník o základnách 6 cm a 4 cm a výšce, která je aritmetickým průměrem jeho základen ?

29) Vypočtěte délku ramen rovnoramenného lichoběžníka, známe-li délky základen a = 4,8 cm, c = 18 mm a jeho obvod O = 116 mm. Vypočtěte obsah tohoto lichoběžníka.

30) Čtverec ABCD má délku strany a. Délku strany AB zvěšíme o 25 %.
O kolik procent musíme zmenšit stranu BC, abychom dostali obdélník o stejném obsahu ?

31) Parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníka ABCD, kde AB//CD, s pravým úhlem při vrcholu B, /AB/ = 30m, AB : BC = 5 : 2, AB : CD = 6 : 5. Kolik metrů pletiva je potřeba na oplocení parcely ?

32) Strany obdélníka jsou v 5 : 3, jeho obvod měří 96 cm. Určete délky stran obdélníka.

33) Nádrž o šířce 1,5 m, délce 1,8 m a hloubce 0,9 m je do poloviny naplněna vodou. Hodíme-li do ní krychlový plovák s délkou hrany 0,6 m, hladina stoupne o 1 cm. Kolik procent objemu plováku je pod vodou?

34) Na celou plochu jezera prší. Během noci spadne na 1 $m^2$ 60 litrů dešťové vody. O jakou výšku se zvedne hladina jezera?

35) Určete objem a povrch čtyřbokého hranolu ABCDEFGH, je-li dáno /AB/ = 4 cm; /BC/ = 3 cm a obsah obdélníka BFHD je 105 $cm^2$.

36) Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna je 10 cm a rameno 13 cm. Výška hranolu je trojnásobek obvodu podstavy. Vypočítejte povrch a objem tohoto hranolu.

37) Krabice o objemu 1 litr má tvar čtyřbokého hranolu, jehož výška je dvakrát větší než šířka a šířka je dvakrát větší než délka.
a) Vypočítejte výšku, délku a šířku krabice.
b) Kolik $cm^2$ papíru se spotřebuje na výrobu takové krabice, jestliže 10 % ze spotřebovaného materiálu připadne na spoje a záhyby ?
c) Jakou minimální délku by muselo mít pevné brčko, abychom jej do krabice mohli jakkoli zastrčit a ono nespadlo dovnitř ?

38) Pravidelný čtyřboký hranol má čtvercovou podstavu o délce a = 15 cm, povrch hranolu je 16,5 $dm^2$. Vypočítejte :
a) obsah pláště;
b) výšku a objem hranolu;
c) délku tělesové úhlopříčky.

39) Podstava kolmého trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 5 cm. Obsah největší stěny pláště je 1,3 $dm^2$ a výška je 10 cm. Vypočitěte objem hranolu.

40) Zmenšíme-li hrany krychle o 30 %, má krychle povrch 1 176 $cm^2$. Vypočítejte původní délku hrany krychle a její objem.

41) Rovnoramenný lichoběžník má základny dlouhé 12 cm a 45mm. Rameno lichoběžníku má dálku 65 mm. Vypočítejte výšku, úhlopříčku, obsah a obvod lichoběžníku.

42) Mýdlo má tvar kvádru. Milan ho pravidelně používá a zjistil, že za 19 dní se jeho původní rozměry zmenšily o jednu třetinu. Kolik dní může Milan používat zbylý kus mýdla ?

43) Krabice tvaru krychle má délku hrany 4 dm.
a) Kolik metrů čtverečních plechu se spotřebuje na její zhotovení, připočítáme-li 4 % materiálu na spoje a odpad? Krabice má víko.
b) Vejde se do uzavřené krabice tyč dlouhá 70 cm ?

44) Podstavou kolmého čtyřbokého hranolu je rovnoramenný lichoběžník se základnami dlouhými 1,8 dm a 80 mm, které jsou od sebe vzdáleny 12 cm. Tato vzdálenost je 60 % tělesové výšky hranolu. Vypočtěte objem a povrch hranolu.

45) Kvádr má objem 200 litrů , hrany mají délky 50 cm a 40 cm. Vypočtěte povrch kvádru.

46) Vypočítejte výšku rovnoramenného lichoběžníka ABCD ( AB // CD, je osově souměrný podle osy základen ), jestliže a = 7 cm, b = 6 cm, c = d = 3 cm ?

47) Rameno rovnoramenného lichoběžníku ABCD (AB $\parallel$ CD) má délku 41 cm, střední příčka EF=45cm, výška se rovná 40 cm. Vypočítejte délku obou základen.

48) Vypočtěte délky stran rovnoramenného trojúhelníka, má-li jeho výška na základnu velikost 25 cm a poměr velikosti základny k velikosti ramena je 6:5.

# Výsledky příkladů:

**1)** 72°; 81°; 90; 117°;**2) a)** 94,4 cm; **b)** 148 dm;
**3) a)** 161 $cm^2$ ; **b)** 119,72 $dm^2$; **c)** 0,224 $m^2$ ;
**4)** 0,4 m; **5)** 7,2 cm;
**6) a)** 24 cm; 35 $cm^2$; 5 cm; **b)** 19,6 cm; 29,61 $cm^2$; 5,8 cm;
**7) a)** o 195 cm; **b)** 1 m;
**8) a)** 55,04 $cm^2$; **b)** 1,029 cm; **c)** 7 cm; **d)** 56 cm; **e)** 45 cm;
**10) a)** 7,48 dm; 3,1 $dm^2$; **b)** 20,6 cm; 26,5 $cm^2$;
**11) a)** 10 m; **b)** 21 dm; **c)** 2 m; **d)** 260 mm; **e)** 16 cm; **f)** 1,72 m; **g)** 40 cm;
**12) a)** 24 $cm^2$; **b)** 24,14 $cm^2$; **c)** 110,8 $cm^2$; **d)** 48 $cm^2$;
**13)** 3,75 kg;**14)** 874 m;**15)** 8 metrů;**16)** 79,189 $m^2$; 6 rolí;**18)** 5,65 m;
**19)** 12,5 $cm^2$; přibližně 3,54 cm;
**20) a)** ne; **b)** ano; **c)** ano, je-li strana čtverce 4 jednotky; **d)** ano; **e)** ano;
**f)** ano; **g)** ano; **h)** ano; **i)** ne; j) ano;
**21)** 50%. **24) a)** 20 cm; 20 $cm^2$; **b)** 18 cm; 33,3 $cm^2$; **c)** 100 cm; 11,5 $dm^2$;
**25) a)** 42 $cm^2$; **b)** 110,05 $cm^2$; **c)** 62,5 $cm^2$; **d)** 90 $cm^2$; **e)** 11,1 $cm^2$;
**f)** 24 $cm^2$; **g)** 73,3 $cm^2$;
**27) a)** 28 $cm^2$; **b)** 1 697,5 $cm^2$;28) 10 cm; **29) a) 7** cm; **b)** 28 cm; **c)** 54 cm;
**30) a)** 28 $cm^2$; 23,65 cm; **b)** 14,235 $cm^2$; 15,25 cm; **c)** 266,5 $cm^2$; 68,76 cm;
**36) a)** 0,64 $m^3$; S = 8,08 $m^2$; **b)** 15 $cm^3$, 46 $cm^2$; **c)** 150 $cm^3$; 210 $cm^2$;
**37) a)** 220,8 $cm^3$; 247,2 $cm^2$; **b)** 120.$\sqrt{2}$ $cm^3$; 187,58 $cm^2$;
**38) a)** 432 $cm^3$; 372 $cm^2$; **b)** 240 $dm^3$; 566$dm^2$; **c)** 1,728 $m^3$; 9,12 $m^2$;
**39) a)** 343 $m^2$; 294 $m^2$; **b)** 592,704 $cm^3$; 455,93 $cm^2$; **c)** 42,875 $cm^3$; 73,5 $cm^2$;
**d)** 21,952 $cm^3$; 47,06 $cm^2$;
**40) a)** 207,85 $cm^3$; 203,14 $cm^2$; **b)** 468 $cm^3$; 367,12 $cm^2$;
**41) a)** 10 cm; **b)** 273,6 $cm^2$;

**42) a)** 72,576 $cm^3$; 144 $cm^2$; **b)** 43,56 $cm^3$, 74,58 $cm^2$; **c)** 11,968 $cm^3$; 61,12 $cm^2$; **d)** 45 $cm^3$; 78 $cm^2$;
**43) a)** 6 cm; **b)** 18 cm; **c)** 4 cm;
**44)** 90 $cm^2$; **45) a)** 320 $m^2$ obkladaček; **b)** 33 hodin 20 minut;**46)** 1,92864 $m^3$;
**47)** 3 434 cihel;**48)** 8 dm; 10 dm;
**49)** Pravoúhlým průmětem trojúhelníka bude shodný trojúhelník.
**50) a)** spodní podstava ABCD leží v rovině půdorysny; **b)** zadní stěna leží DCC´D´ leží v rovině nárysny; **c)** spodní podstava ABCD leží v rovině půdorysny a zadní stěna leží DCC´D´ leží v rovině nárysny;

# Výsledky souhrnných cničení

**1)** 122,5 hl;**2)** 3 888 $cm^2$;**3)** 96,25 $m^3$;**4)** 90 $dm^3$;**5)** 71 kg;**6)** 2,7 dm; **7)** 408 $m^3$;
**8)** 2,812 5 $m^2$;**9)** 6 $m^3$;**10)** 6, 864 $m^3$; 22,96 $m^2$;**11)** obsahy jsou shodné;
**12)** 250,8 $m^3$;**13)** 56 jízd;**14)** 240 konví;**15)** 34;**16)** 14 krát;
**17) a)** 192; **b)** 5,21 g; **c)**112 000 $m^2$;**18)** 96 $cm^2$; 40 cm;**20)** přibližně 3,3 cm;
**21)** 225 $cm^2$;**22)** 37,5 $m^2$;**23)** 85 cm;**24)** 360 $cm^2$; 300 $cm^3$;**25)** 1 459,5$cm^2$;
**26)** 4 cm; 64 $cm^3$;**27)** 4 dm;**28)** 20 cm;**29)** 25 mm; 660 $mm^2$;**30)** o 20 %;
**31)** 80 m ;**32)** 30cm; 18 cm;**33)** 12,5 %;**34)** 6cm;**35)** 253 $cm^3$; 318 $cm^2$;
**36)** 4 008 $cm^2$; 6 480 $cm^3$;
**37) a)** 20 cm; 5 cm; 10 cm; **b)** 778 $cm^2$; **c)** 22,9 cm;
**38) a)** 1 200 $cm^2$; **b)** 20 cm; 4 500 $cm^3$; **c)** 29,15 cm;**39)** 0,3 $dm^3$;
**40)** 20 cm, 8 000 $cm^3$;**41)** 53 mm, 98,1 mm, 4 372,5 $mm^2$, 295 mm;
**42)** 8 dní;**43) a)** 99,8 $dm^2$; **b)** nevejde;**44)** 3 120 $cm^3$; 1 352 $cm^2$;
**45)** 220 $dm^2$;**46)** 5,66 cm;**47)** 54 cm; 36 cm; **48)** 37,5 cm, 31,25 cm;