6. Podobnost. Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

6.1. Podobnost geometrických útvarů.

Podobností (podobným zobrazením) nazýváme takové geometrické zobrazení, je-li každému bodu X přiřazen X* a každému bodu Y přiřazen bod Y* tak, že platí $|X^*Y^*| = k.|XY|$.
k je konstanta, kterou nazýváme koeficient podobnosti $k > 0$.

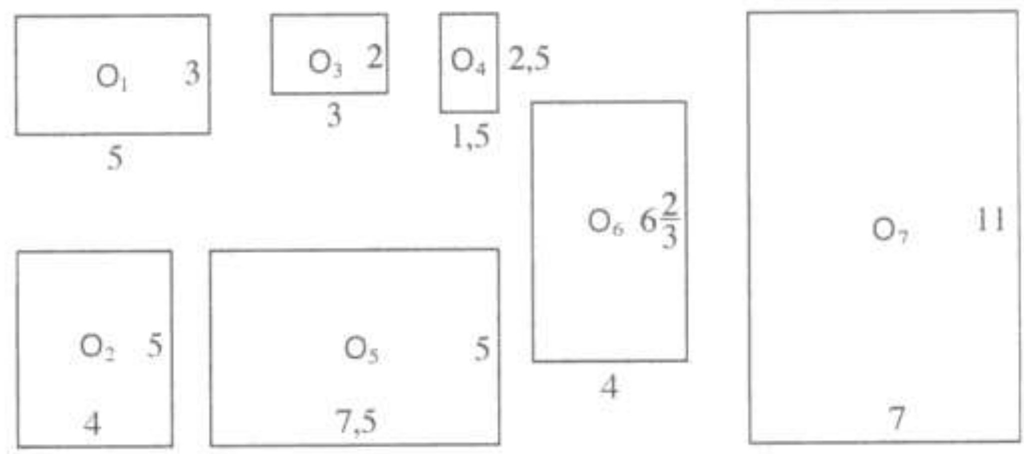
Jinými slovy :
Dva geometrické útvary nazýváme podobné, jestliže poměry délek všech dvojic odpovídajících si úseček těchto útvarů se rovnají témuž číslu $k > 0$.

$0 < k < 1$ jde o podobnost, kterou označujeme jako **zmenšení**
$k = 1$ zvláštní případ podobnosti, kterou nazýváme **shodnost**
$k > 1$ jde o podobnost, kterou označujeme jako **zvětšení**

Je-li obrazec A podobný s obrazcem B (A ~ B), tak poměr podobnosti vypočítáme jako poměr velikosti strany obrazce B ku velikosti příslušné strany obrazce A.

$A \sim B \qquad k = \frac{x_B}{x_A}$

Příklad : Rozhodněte zda některé dva obdélníky jsou podobné a vypočtěte poměr podobnosti.



Řešení : Pro příslušné strany obdélníků O_4, O_1 a O_6 platí :

$x_4 : x_1 : x_6 = 2{,}5 : 5 : 6\frac{2}{3} = 15 : 30 : 40 = 3 : 6 : 8$

$y_4 : y_1 : y_6 = 1{,}5 : 3 : 4 = 3 : 6 : 8$

$O_4 \sim O_1 \quad k = 6 : 3 = 2$

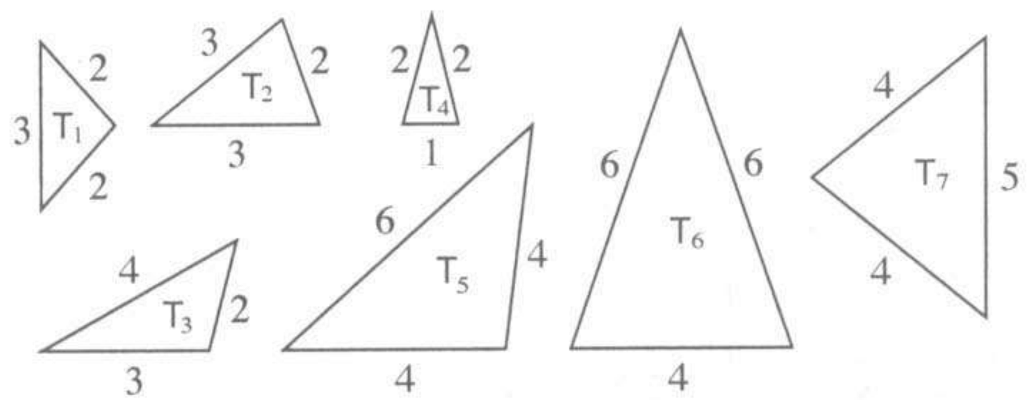
$O_1 \sim O_6 \quad k = 8 : 6 = \frac{4}{3}$

$O_4 \sim O_6 \quad k = 8 : 3 = \frac{8}{3}$

Pro příslušné strany obdélníků O_3 a O_5 platí : $x_3 : x_5 = 3 : 7{,}5 = 6 : 15 = 2 : 5$
$y_3 : y_5 = 2 : 5$

$O_3 \sim O_5$ $k = 5 : 2 = 2{,}5$

Příklad : Rozhodněte zda některé dva trojúhelníky jsou podobné a vypočtěte poměr podobnosti.



Řešení : Pro příslušné strany trojúhelníků T_1 a T_5 platí : $3 : 6 = 1 : 2$
$2 : 4 = 1 : 2$
$2 : 4 = 1 : 2$

$\Delta T_1 \sim \Delta T_5$ $k = 2 : 1 = 2$

Pro příslušné strany trojúhelníků T_2 a T_6 platí : $3 : 6 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$
$2 : 4 = 1 : 2$

$\Delta T_2 \sim \Delta T_6$ $k = 2 : 1 = 2$

Pro ostatní dvojice trojúhelníků neplatí, že jejich příslušné strany jsou ve stejném poměru. Například T_6 a ΔT_7.
$6 : 5$ $6 : 4$ $4 : 4$ $\Rightarrow$ ΔT_6 není podobný s ΔT_7.

Příklad : Jsou podobné libovolné dvě kružnice ?

Řešení : ano, každé dvě libovolné kružnice jsou podobné a poměr podobnosti je poměrem jejich poloměrů.

6.2. Podobnost trojúhelníků

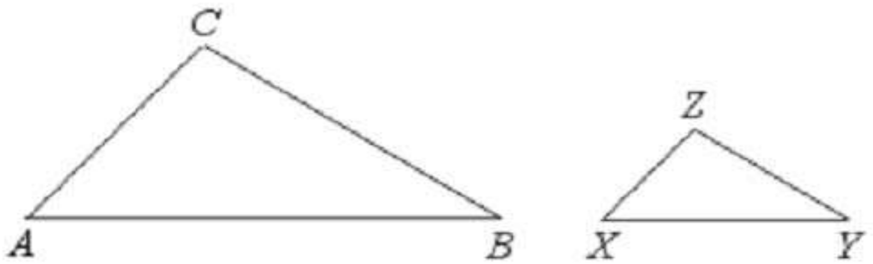
6.2.1. Podobnost trojúhelníků

Skutečnost, že dva trojúhelníky *ABC*, *XYZ* jsou podobné, zapisujeme takto: $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$
Je při tom důležité dbát na to, aby vrcholy trojúhelníků byly zapsány v tom pořadí, ve kterém si v podobnosti odpovídají.

$|XY| = 0,5.|AB|$

$|YZ| = 0,5.|BC| \qquad \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ \qquad k = 0,5$

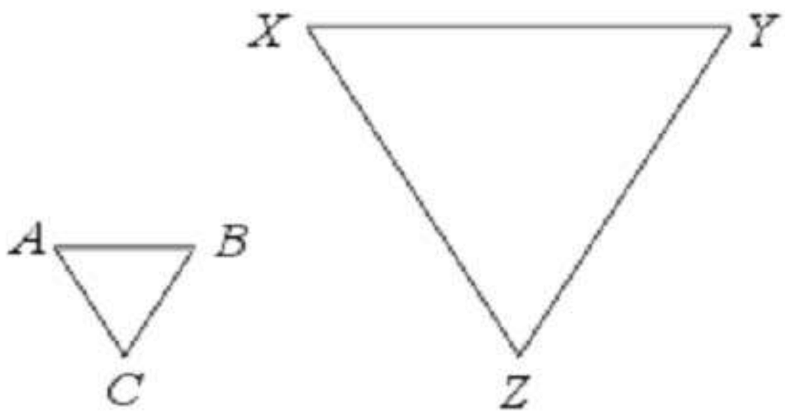
$|XZ| = 0,5.|AC|$



$|XY| = 3.|AB|$

$|YZ| = 3.|BC| \qquad \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ \qquad k = 3$

$|XZ| = 3.|AC|$



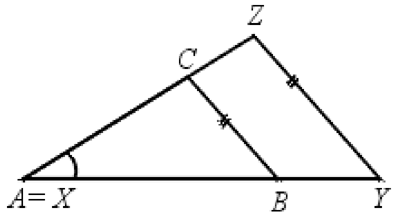
6.2.2.Věty o podobnosti trojúhelníků :

V sss - Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.

a’ : a = b’ : b = c’ : c = k nebo $\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|BC|}{|YZ|} = \frac{|AC|}{|XZ|} = k$

V sus – Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou dvojic odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

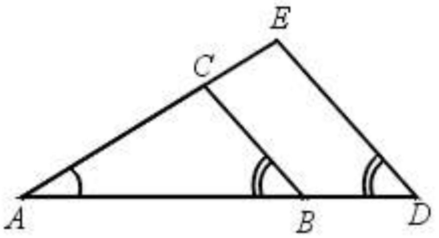
a’ : a = b’ : b = k γ ’= γ



na obrázku $\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|AC|}{|XZ|} = k$, $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ZXY|$

V uu – Každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

α ’ = α β ’ = β



na obrázku $\alpha = \alpha$ $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADE|$

Příklad : Trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem KLM. Jaké jsou poměry dvou stran trojúhelníka k poměru dvou příslušných stran podobného trojúhelníka ?

Δ ABC ~ Δ KLM $\Rightarrow$ $\frac{k}{a} = \frac{l}{b}$ $\Rightarrow$ k.b = a.l $\Rightarrow$ $\frac{k}{l} : \frac{a}{b}$

Poměr dvou stran trojúhelníka je stejný jako poměr příslušných dvou stran podobného trojúhelníka.

Příklad : Trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem XYZ. a = 5 cm b = 6 cm y = 9 cm z = 12 cm. Vypočtěte zbývající velikosti stran.

Řešení : k = $\frac{y}{b}$ k = $\frac{9}{6} = 1{,}5$ k = $\frac{x}{a}$ 1,5 = $\frac{x}{5}$ **x = 7,5 cm**

k = $\frac{z}{c}$ 1,5 = $\frac{12}{c}$ **c = 8 cm**

Příklad 1 : Vypočtěte zbývající velikosti stran trojúhelníků. Δ ABC ~ MNO :
a) a = 4 cm b = 5 cm m = 8 cm o = 12 cm
b) b = 3 cm c = 5 cm m = 2 cm o = 2,5 cm

Příklad 2 : Dokažte, že pro trojúhelníky Δ ABC ~ Δ A’B’C’ se stranami a ≠ b b ≠ c a ≠ c již nemůže platit : a) Δ ABC ~ Δ A’C’B’

b) $\Delta ABC \sim \Delta\ C'B'A'$

Příklad 3 : Rozhodněte, zda platí $\Delta ABC \sim \Delta\ A'B'C'$:

a) a = 2 cm b = 5 cm c = 6 cm a’ = 1 cm b’ = 3 cm c’ = 2,5 cm
b) a = 2 cm b = 5 cm c = 6 cm a’ = 1 cm b’ = 2,5 cm c’ = 3 cm
c) a = 2 cm b = 6 cm c = 5 cm a’ = 1 cm b’ = 3 cm c’ = 2,5 cm
d) a = 2 cm b = 5 cm $\gamma = 30°$ a’ = 1 cm b’ = 3 cm $\gamma' = 30°$
e) a = 2 cm b = 5 cm $\gamma = 30°$ a’ = 1 cm b’ = 10 cm $\gamma' = 30°$
f) a = 2 cm b = 5 cm $\gamma = 30°$ a’ = 1 cm b’ = 2,5 cm $\alpha' = 25°$ $\beta' = 125°$
g) a = 5 cm $\alpha = 25°$ $\beta = 85°$ $\alpha' = 25°$ $\beta' = 85°$
h) a = 5 cm $\alpha = 25°$ $\beta = 85°$ $\alpha' = 25°$ $\gamma' = 70°$
i) $\alpha = 25°$ $\beta = 125°$ $\alpha' = 25°$ $\gamma' = 70°$
j) $\alpha = 15°$ $\beta = 95°$ $\alpha' = 15°$ $\gamma' = 70°$.

Příklad 4 : Dokažte, že : a) každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné
b) každé dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné
c) každé dva rovnoramenné trojúhelníky se shodnými úhly proti základně jsou podobné.

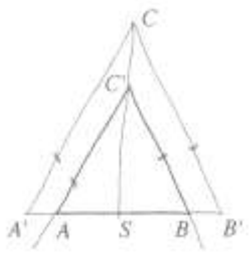
Příklad 5: K trojúhelníku ABC, a = 5 cm b = 3,7 cm c = 4,3 cm sestrojte podobný trojúhelník A’B’C’, je-li k = 1,3.

Příklad 6 : Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. BX je výška v trojúhelníku ABC. XY je výška trojúhelníku ABX. Vyjádřete délku úsečky AY v závislosti na délce AB.
Příklad 7 : Je dán kvádr ABCDEFGH a A’B’C’D’E’F’G’H’. Jaký je poměr objemů a povrchů těchto kvádrů, platí-li | A’B’ | = k . | AB | ?

Příklad : Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $|AB|:|BC| = 1:2$, $|AB|:|AC| = 2:3$, t_c = 4 cm.

/AB/ : /BC/ : /AC/

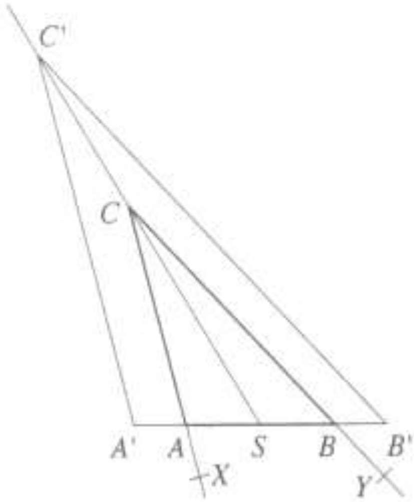
1 : 2
2 : 3
----
2 : 4 : 3



Rozbor : 1) $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ zvolíme si například : c’ = 4 cm a’ = 8 cm b’ = 6cm
2) t_c
3) t_c'
4) ΔABC

Postup konstrukce : každý si provede sám

Konstrukce :



Diskuze : pro Δ A'B'C' platí trojúhelníková nerovnost $\Rightarrow$ existuje pouze jeden trojúhelník v dané polorovině. $\Rightarrow$ existuje pouze jeden Δ ABC.

Příklad 8 : Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno

a) $|AB|:|AC| = 5:3$, $|BC| = 6$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 60\,°$

b) $|AB|:|AC| = 2:3$, v_c = 6 cm, $|\sphericalangle ABC|$ = 45°

Jestliže poměr podobnosti dvou trojúhelníků je k, pak jeho obvody jsou také v poměru k.
Jestliže poměr podobnosti dvou trojúhelníků je k, pak jejich obsahy jsou v poměru k^2.

Příklad 9 : Trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem A´B´C´. a = 8,4 cm, b = 7,8 cm, c = 6 cm. Vypočítej velikosti stran a´, b´, c´, jestliže obvod trojúhelníka A´B´C´je 11,1 cm.

Příklad 10 : Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Dokažte, že výška k přeponě AB rozdělí trojúhelník ABC na dva podobné trojúhelníky.

5.3 Velikost úsečky

Podobnosti trojúhelníků se používá při řešení některých praktických úkolů, například při dělení úsečky na shodné části nebo jejím zmenšování či zvětšování apod.

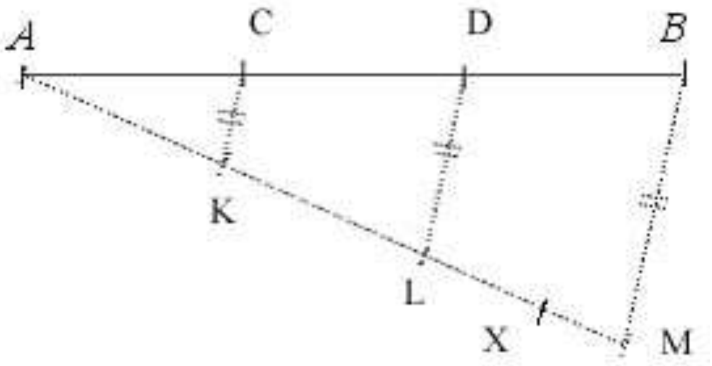
Při podobnosti trojúhelníků podle Vsus jsme si ukázali, že strany ležící proti společnému úhlu jsou rovnoběžné.

6.3.1. Rozdělit úsečku na určitý počet stejných částí

Příklad : Rozdělte úsečku *AB* na n (v našem případě n = 3) stejných částí.

Řešení : 1) Sestrojíme úsečku AB požadované velikosti.
2) Úsečku doplníme na libovolný ostrý úhel BAX.

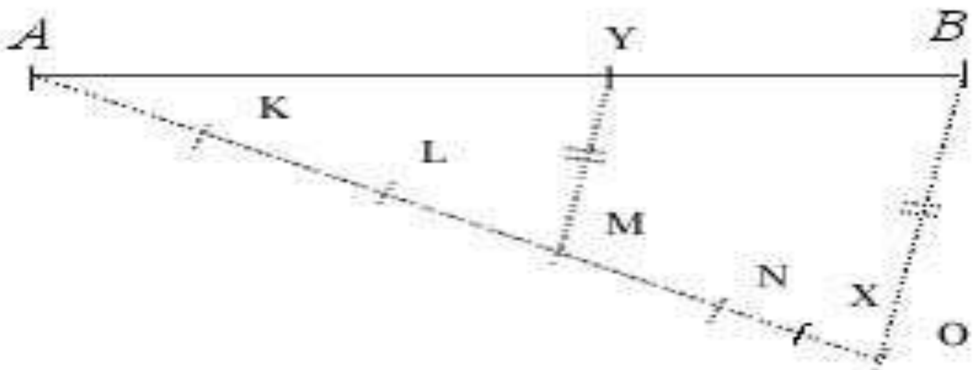
3) Na polopřímku AX naneseme n stejně dlouhých úseček (body K, L, M). Krajní bod první úsečky je totožný s bodem A.
4) Druhý bod poslední úsečky (M) spojíme s bodem B.
5) Body K a L vedeme rovnoběžky s úsečkou BM.
6) Průsečíky těchto rovnoběžek s úsečkou AB označíme jako body C a D.
7) $|AC| = |CD| = |DB| = \left|\frac{AB}{n}\right|$



Příklad 9 : Rozdělte úsečku $|CD|$ = 11, 5 cm : a) čtyři stejně dlouhé úsečky
b) na polovinu (nepoužívejte osu úsečky)

Příklad : Rozdělte úsečku *AB* v poměru m : n (v našem případě 3 : 2)

Řešení : 1) Sestrojíme úsečku AB požadované velikosti
2) Úsečku doplníme na libovolný ostrý úhel BAX.
3) Na polopřímku AX naneseme m+n (v našem případě pět) stejně dlouhých úseček (body K, L, M, N, O). Krajní bod první úsečky je totožný s bodem A.
4) Druhý bod poslední úsečky (O) spojíme s bodem B.
5) Bodem M (třetí bod) vedeme rovnoběžku s úsečkou BO.
6) Průsečík této rovnoběžky a úsečkou AB je bod Y.
7) $|AY| : |YB| = 3 : 2$



6.3.2. Rozdělení úsečky v daném poměru

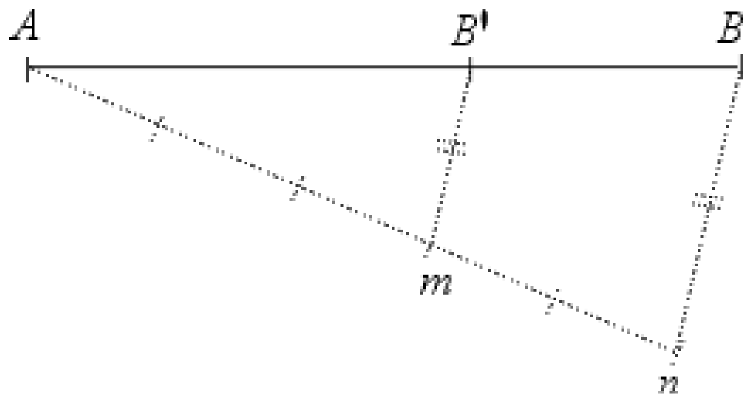
Příklad 10 : Rozdělte úsečku $|EF|$ = 10,7 cm v poměru :

a) 3 : 4 b) 1 : 4 c) 1,2 : 1,8 d) 0,5 : 4

Příklad : Změňte (zmenšete) úsečku *AB* v poměru m : n (v našem případě 3 : 5) .

Řešení : podobným postupem jako v předcházejícím příkladě.

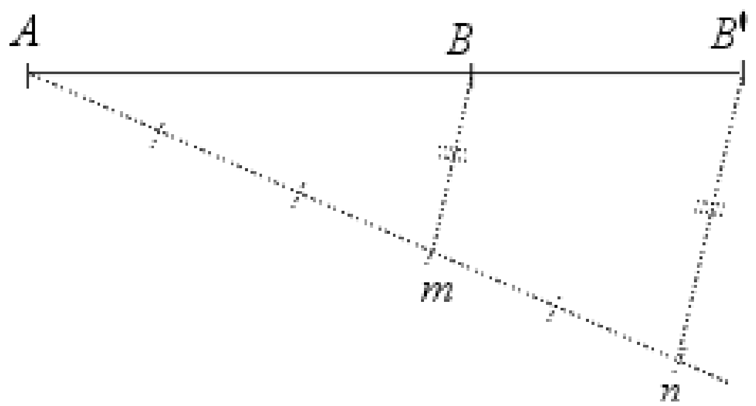
$|AB'| = \frac{m}{n}|AB|$



Příklad : Změňte (zvětšete) úsečku *AB* v poměru m : n (v našem případě 5 : 3) .

Řešení : podobným postupem jako v předcházejícím příkladě.

$|AB'| = \frac{m}{n}|AB|$



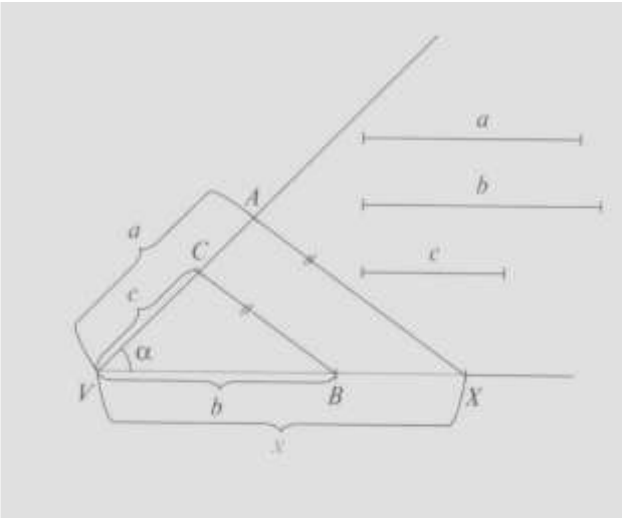
Příklad 11 : Změňte úsečku $|XY|$ = 9,7 cm v poměru :

a) 2 : 3 b) 3 : 2 c) 1 : 5 d) 0,4 : 1,2 e) k = 2 f) k = 0,5

6.3.3. Konstrukce úsečky zadané výrazem

Příklad : Narýsujte úsečku délky x = $\frac{ab}{c}$, kde úsečky délek a, b, c jsou dány.

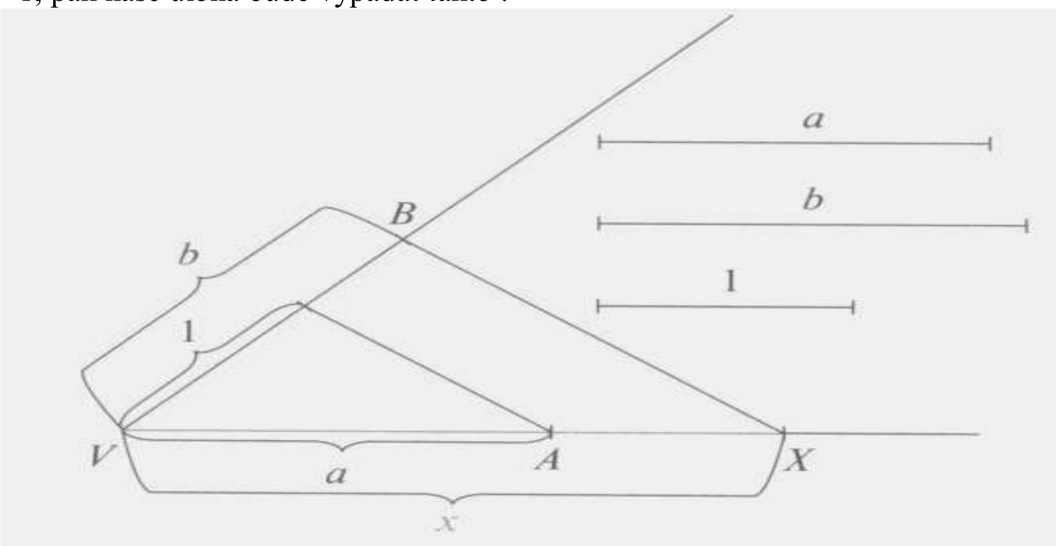
Řešení : 1) Narýsujeme libovolný ostrý úhel α .
2) Na jedno rameno naneseme velikost úsečky b a označíme body V a B.
3) Na druhé rameno naneseme velikost úsečky c a označíme bod C.
4) Na totéž rameno naneseme velikost úsečky a a označíme bod A.
5) Bodem A vedeme rovnoběžku s úsečkou BC.
6) Průsečík této rovnoběžky s polopřímkou VB označíme jeko bod X.
7) Úsečka VX má velikost $\frac{a.b}{c}$



Zdůvodnění našeho postupu :

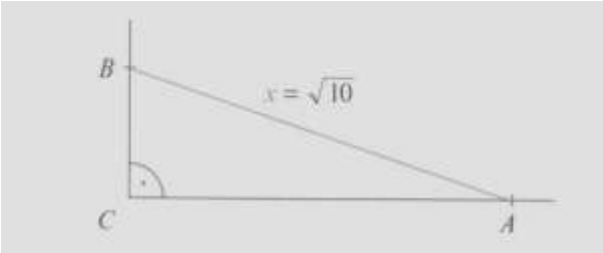
ΔVXA ~ ΔVBC podle Vuu. $\Rightarrow \frac{|VX|}{|VB|} = \frac{|VA|}{|VC|} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow x = \frac{a.b}{c}$

Je-li c = 1, pak naše úloha bude vypadat takto :



Připomeneme si naše znalosti o Pythagorově větě, kde jsme se učili rýsovat velikosti úseček mající tvar odmocniny reálného čísla.

Například x = $\sqrt{10}$



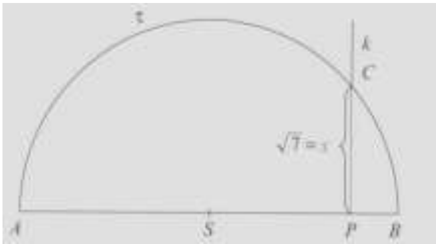
Připomeneme si naše znalosti o Euklidově větě o výšce, kde jsme se učili rýsovat velikosti úseček mající tvar odmocniny reálného čísla.

Například x = $\sqrt{7}$

$v_c^2 = c_a \cdot c_b$ $\quad\quad \sqrt{7} = \sqrt{7.1} \quad\quad \Rightarrow \quad\quad c_a = 7$ cm $\quad\quad c_b = 1$ cm

$|AB| = d = 7 + 1 = 8$ (cm) $\quad\quad \tau \equiv$ (S ; 4 cm) $\quad\quad |AP| = 7$ cm

k je kolmá na úsečku AB $\quad\quad |PC| = \sqrt{7}$ cm



Po těchto znalostech můžeme narýsovat v podstatě úsečku v libovolném tvaru.

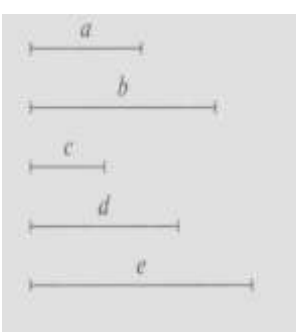
Příklad 12 : Jsou dány dvě úsečky AB // CD. Uvnitř úsečky AB zvolte libovolně body X a Y. Sestrojte uvnitř úsečky CD body U a V tak, aby platilo $|AX|:|AY|:|AB| = |CU|:|CV|:|CD|$.

Příklad 13 : Trojúhelní ABC má délky stran a = 5,2 cm b = 4,8 cm c = 6 cm. K trojúhelníku ABC sestrojte podobný trojúhelník A'B'C', jehož obvod má délku 13,5 cm.

Příklad 14 : Svislá dvoumetrová tyč vrhá stín 2,5 m dlouhý. Jak vysoký je strom, který vrhá stín 6,8 m ?

Příklad : Sestrojte úsečku x = $\dfrac{a^2 + b^2 - cd}{e}$.

Zadání velikosti úseček :



Řešení :

1. fáze : ve výrazu dosadíme $a^2 + b^2 = m^2$ m sestrojíme pomocí Pythagorovy věty

$$x = \frac{m^2 - cd}{e}$$

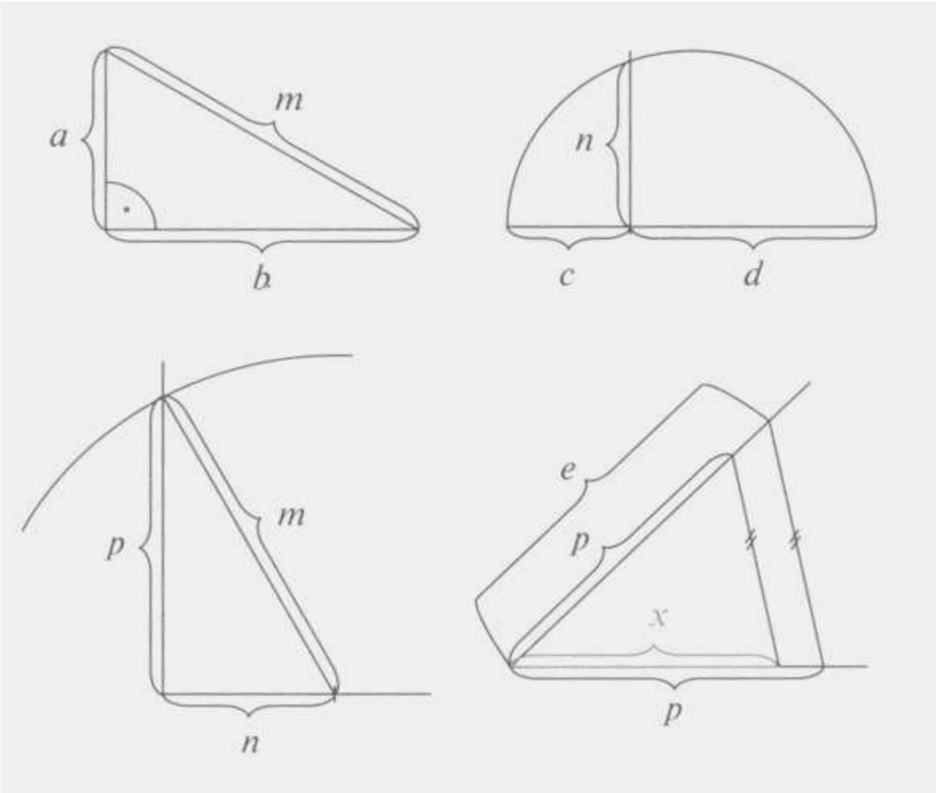
2. fáze : ve výrazu dosadíme $cd = n^2$ n sestrojíme pomocí Euklidovy věty o výšce

$$x = \frac{m^2 - n^2}{e}$$

3. fáze : ve výrazu dosadíme $m^2 - n^2 = p^2$ p sestrojíme pomocí Pythagorovy věty

$$x = \frac{p^2}{e} = \frac{p.p}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{p} = \frac{p}{e}$$

4. fáze : sestrojíme $\frac{x}{p} = \frac{p}{e}$ x sestrojíme pomocí podobnosti trojúhelníků



Příklad 15 : Sestrojte úsečku :

a) $x = \frac{1,2^2 + 1,6^2}{5}$

b) $x = \frac{3,2^2 + 1,9^2}{\sqrt{8}}$

c) $x = \frac{5,4^2 - 2,3^2}{7}$

d) $x = \frac{3,4^2 + 1,7^2 - 0,3.5,7}{1,9}$

e) $x = 1,9^3$

f) $x = \sqrt{3}.\sqrt{5}.\frac{7}{11}$

6.4. Technické výkresy, plány a mapy

Příklad 16 : Na turistické mapě v měřítku 1 : 100 000 je vzdálenost dvou míst 5,5 cm.Vypočtěte jejich vzdálenost ve skutečnosti.

Příklad 17 : Na mapě s měřítkem 1 : 20 000 jsme naměřili vzdálenost a = 9,2 cm b = 12 cm c = 7,5 cm. Vypočítejte vzdálenosti ve skutečnosti.

Příklad 18 : Vypočítejte měřítko mapy, na které vzdálenost 21 km ve skutečnosti je zobrazena úsečkou o velikosti 3 cm .

Příklad 19 : Na mapě s měřítkem 1 : 200 000 je vzdálenost dvou bodů 2,3 cm. Jaká bude vzdálenost těchto bodů na mapě s měřítkem 1 : 600 000 ?

6.5. Stejnolehlost

Stejnolehlost je zobrazení, kdy vzor a obraz jsou podobné obrazce.
Stejnolehlost je dána středem stejnolehlosti a koeficientem stejnolehlosti.
Zapisujeme H (S, λ), kde S je střed stejnolehlosti a λ je koeficient stejnolehlosti.

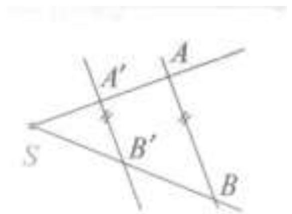
Příklad : Zobrazte ve stejnolehlosti určené bodem S a $\lambda = 2$: a) bod X, který je totožný s bodem S
b) bod A, který je různý od bodu S

Řešení : a) Jestliže X ≡ S, pak i bod X* je totožný s bodem S. Takový bod X nazýváme samodružný.
b) Jestliže bod A je různý od bodu S, tak ve stejnolehlosti najdeme obraz takto :
- je-li $\lambda > 0$ na polopřímce SA ve vzdálenosti $\lambda \cdot |SA|$,
- je-li $\lambda < 0$ na polopřímce opačné k SA ve vzdálenosti $\lambda \cdot |SA|$.

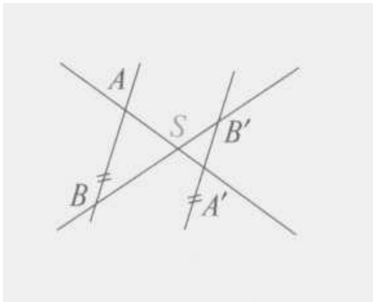
(viz následující příklad).

Příklad : Zobrazte ve stejnolehlosti určené S úsečku AB je-li : a) $\lambda = 0,5$ b) $\lambda = -0,5$

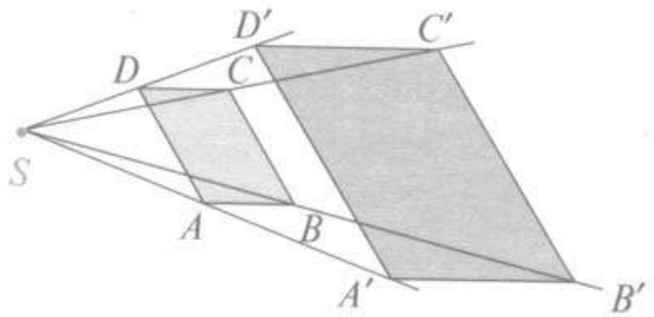
a)



b)



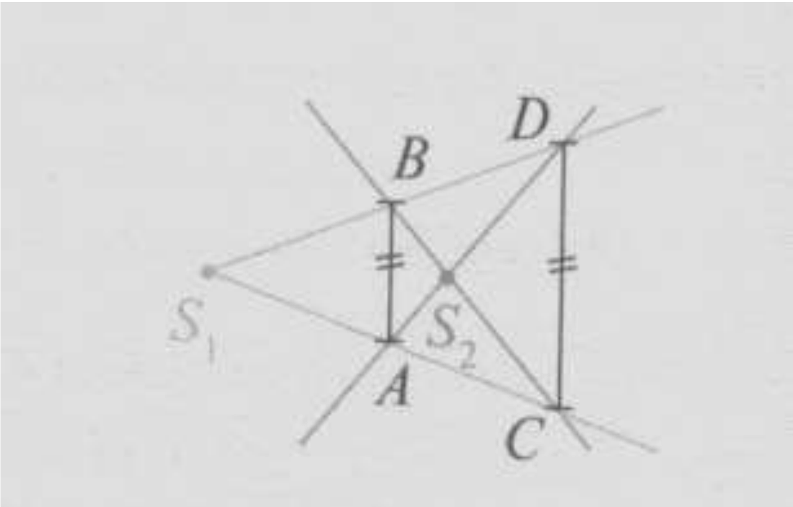
Příklad : Zobrazte ve stejnolehlosti určené bodem S $\lambda = 2$ obrazec ABCD.



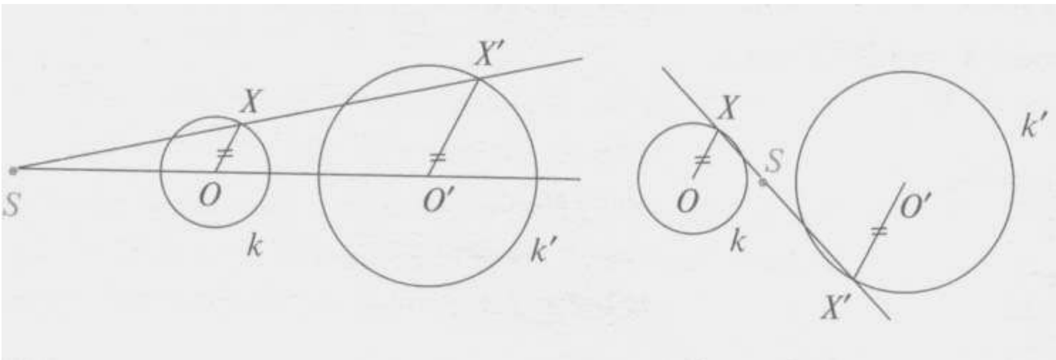
Příklad 20 : Zobrazte ve stejnolehlosti určené bodem S $\lambda = 2,5$ trojúhelník ABC, je-li :
a) a = 2 cm, b = 4 cm c = 5 cm, S leží libovolně mimo trojúhelník,
b) a = 2 cm, b = 4 cm c = 5 cm, S leží libovolně mimo trojúhelník, ale na polopřímce BA,
c) a = 2 cm, b = 4 cm c = 5 cm, S libovolně uvnitř trojúhelníka ABC,
d) a = 2 cm, b = 4 cm c = 5 cm, S libovolně uvnitř trojúhelníka ABC na úsečce AB.

Příklad 21 : Narýsujte čtverec ABCD a = 2,5 cm. Ve stejnolehlosti narýsujte čtverec A*B*C*D*, je-li :
a) střed stejnolehlosti v bodě A $\lambda = 1{,}5$
b) střed stejnolehlosti v bodě A $\lambda = -1{,}5$
c) střed stejnolehlosti v bodě A $\lambda = 0{,}5$
d) střed stejnolehlosti v průsečíku úhlopříček $\lambda = 1{,}5$
e) střed stejnolehlosti v průsečíku úhlopříček $\lambda = 1$

Příklad : Najděte středy stejnolehlostí, jimiž úsečka AB přejde v CD a naopak.

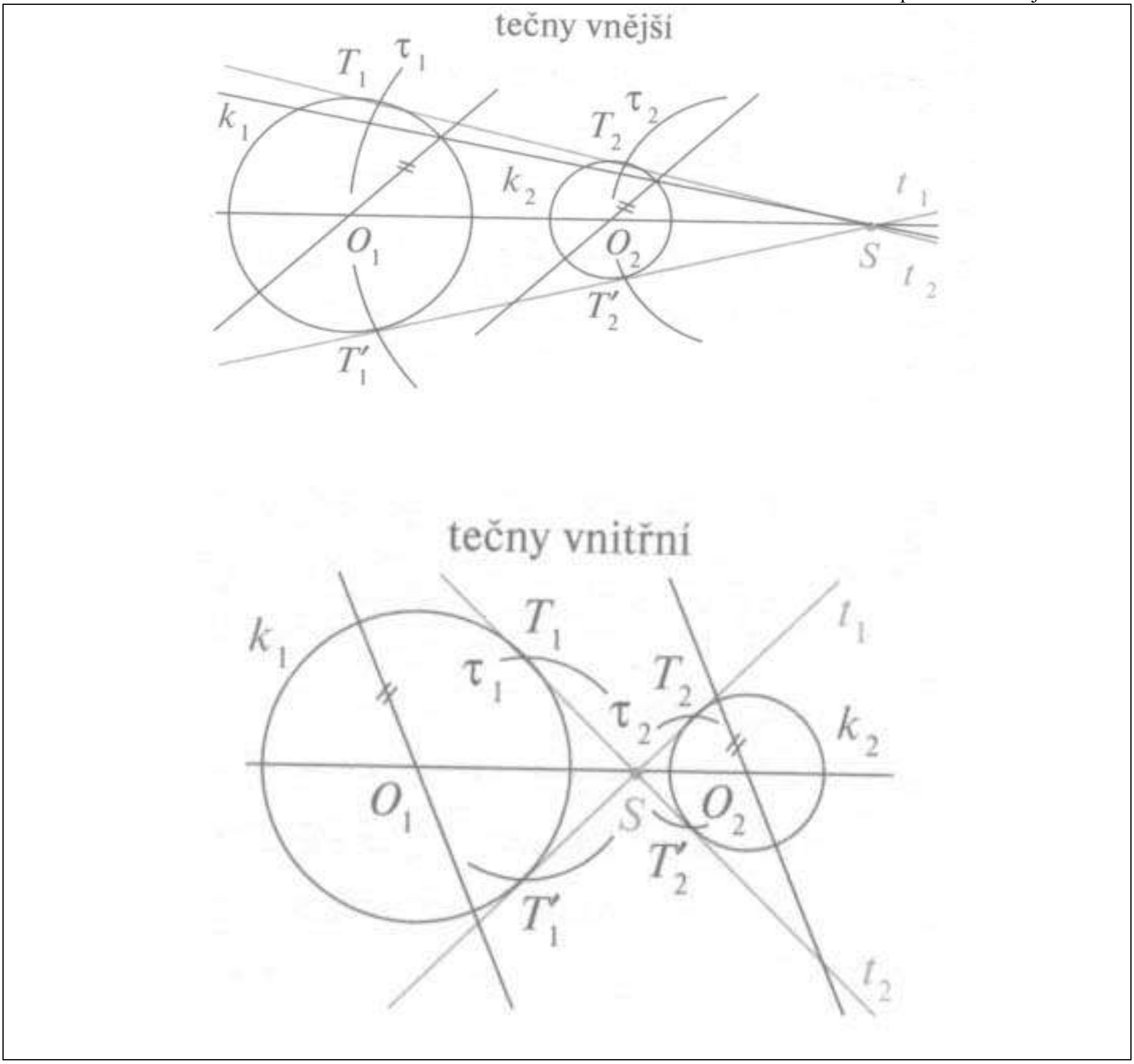


Příklad : Najděte středy stejnolehlostí, jimiž jedna kružnice přejde v druhou a naopak.
a) $\lambda > 0$ b) $\lambda < 0$



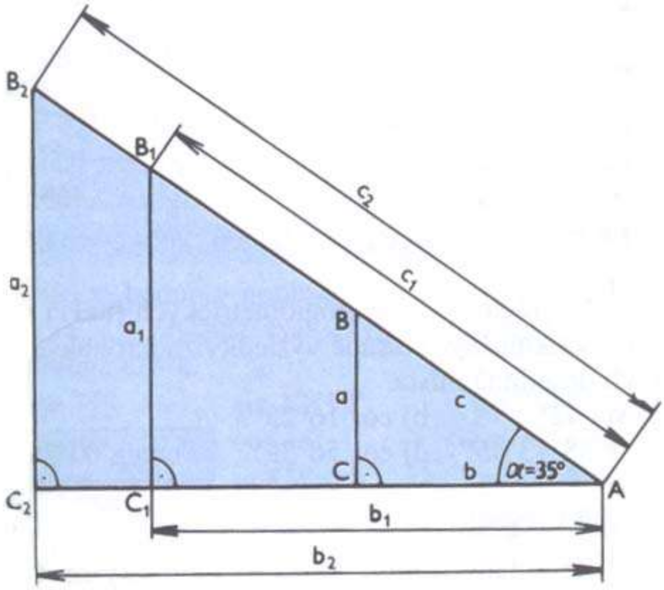
Příklad 22 : Je dána kružnice k_1 určená středem S_1 a poloměrem 5 cm a kružnice k_2 určená středem S_2 a poloměrem 3 cm. $S_1S_2 = 11$cm. Sestrojte středy stejnolehlostí pomocí kterých jedna kružnice přejde v druhou je-li : a) $\lambda > 0$ b) $\lambda < 0$

Příklad : Užitím stejnolehlosti narýsujte a) vnější tečny
b) vnitřní tečny
dvěma různým kružnicím, které nemají stejně veliké poloměry.



6.6. Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

6.6.1. Definice funkcí



□ CAB ≅ □ C_1AB_1 ≅ □ C_2AB_2 $\Rightarrow$ $|AB| = k_1.|AB_1| = k_2.|AB_2|$

$$|BC| = k_1|B_1C_1| = k_2.|B_2C_2| \quad \Rightarrow$$

$$|AC| = k_1.|AC_1| = k_2.|AC_2|$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k_1.|B_1C_1|}{k_1.|AB_1|} = \frac{k_2.|B_2C_2|}{k_2.|AB_2|}$$

Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníka se nazývá sinus úhlu α - píšeme sin α

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k_1.|B_1C_1|}{k_1.|AB_1|} = \frac{k_2.|B_2C_2|}{k_2.|AB_2|}$$

Poměr délky přilehl odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníka se nazývá kosinus úhlu α - píšeme cos α

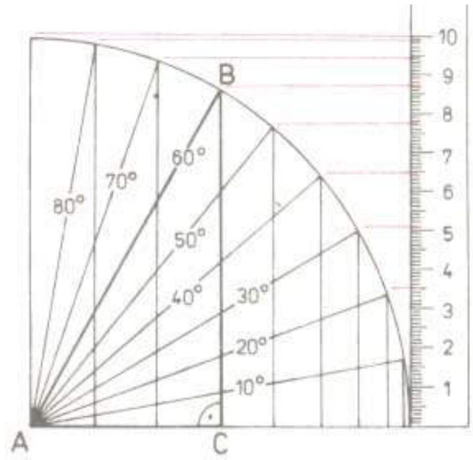
$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k_1.|B_1C_1|}{k_1.|AB_1|} = \frac{k_2.|B_2C_2|}{k_2.|AB_2|}$$

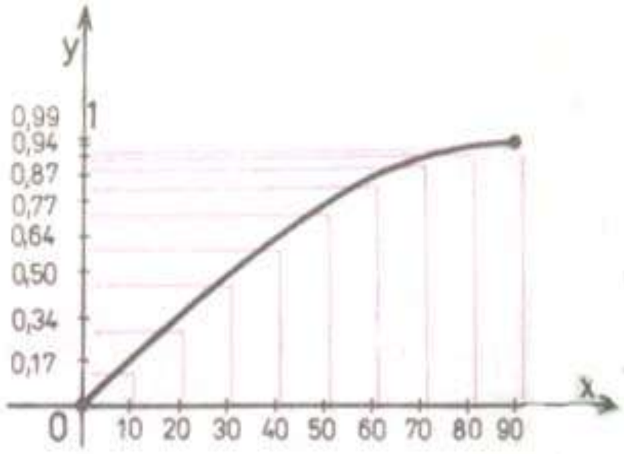
Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka se nazývá tanges úhlu α - píšeme tg α

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k_1.|B_1C_1|}{k_1.|AB_1|} = \frac{k_2.|B_2C_2|}{k_2.|AB_2|}$$

Poměr délky přilehlé odvěsny a délky protilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka se nazývá kotanges úhlu α - píšeme cotg α

6.4.2. Sinus úhlu





graf funkce sinus v intervalu 0° - 90°

Sinus úhlu je poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

Z našeho obrázku : sin $\alpha = \frac{BC}{AB}$

Grafem funkce sinus úhlu je sinusoida.
Funkce sinus úhlu v intervalu 0° - 90° funkcí rostoucí.

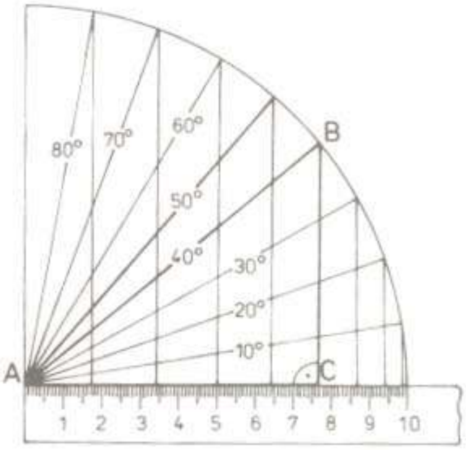
Příklad : Pomocí tabulky určete hodnotu sinus příslušného úhlu :
a) sin 23° b) sin 50° 10´ c) sin 45° 14´
a) sin 23° = **0,3907** b) sin 50° 10´ = **0,7679**
c) sin 45° 14´ = sin 45° 10´ = 0,7092
sin 45° 20´ = 0,7112 10´ ……….0,0020
1´ ……….0,0002
4´ ……….0,0002 . 4 = 0,0008
sin 45° 14´ = sin 45° 10´ + sin 4´ = 0,7092 + 0,0008 = **0,7080**

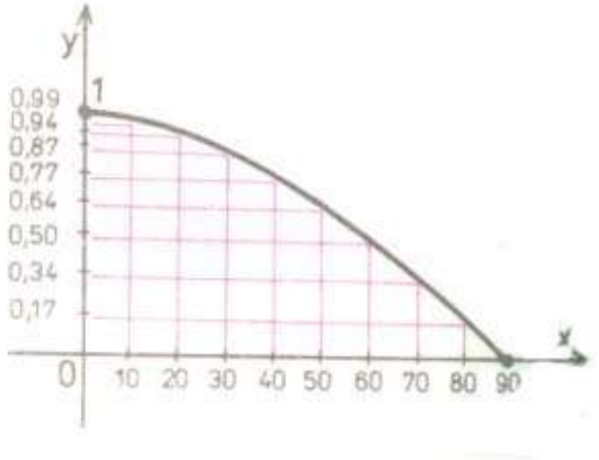
Příklad : Pomocí tabulky určete příslušné hodnoty velikosti úhlu : a) sin α = 0,2419
b) sin α = 0,8307 c) sin α = 0,9024
a) sin α = 0,2419 **α = 14°** b) sin α = 0,8307 α = 56° 10´
c) sin α = 0,9024 sin 64° 20´ = 0,9013
sin 64° 30´ = 0,9026 0,0013 …….. 10´
0,00013 ……. 1´
0,9024 - 0,9013 = 0,0011 0,0011 : 0,00013 = 8´
sin α = 0,9024 = sin (0,9013 + 0,0011) α = 64° 20´ + 8´ = **64° 28´**

Příklad 23 : Pomocí tabulky určete hodnotu sinus příslušného úhlu :
a) sin 50° 10´ = d) sin 24° 45´=
b) sin 15° 50´= e) sin 5° 59´ =
c) sin 87° 19´=

Příklad 24: Pomocí tabulky určete příslušné hodnoty velikosti úhlu :
a) sin α = 0,4848 b) sin α = 0,9001 c) sin α = 0,5848 d) sin α = 0,9006

6.6.3. Kosinus úhlu





graf funkce kosinus v intervalu 0° - 90°

Kosinus úhlu je poměr délky přilehlé odvěsny a délky přepony v pravoúhlém trojúhelníku.

Z našeho obrázku : cos $\alpha = \frac{AC}{AB}$

Grafem funkce sinus úhlu je kosinusoida.
Funkce sinus úhlu v intervalu 0° - 90° funkcí klesajícící.

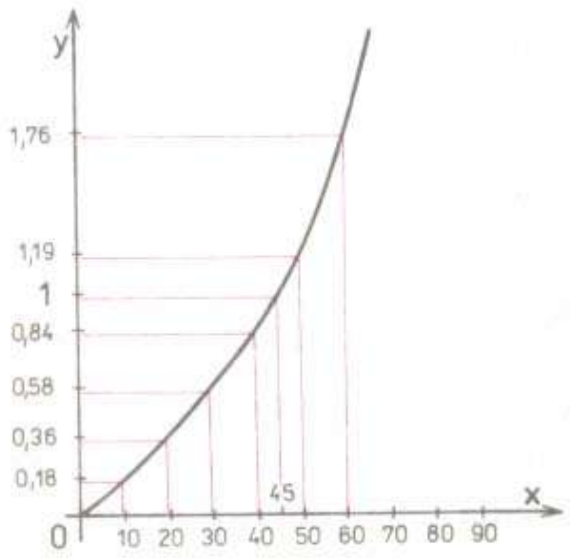
Příklad : Pomocí tabulky určete hodnotu kosinus příslušného úhlu :
a) cos 23° b) cos 50° 10´ c) cos 45° 14´
a) cos 23° = **0,9205** b) cos 50° 10´ = **0,6406**
c) cos 45° 14´ = cos 45° 10´ = 0,7050
cos 45° 20´ = 0,7030 10´ ……….0,0020
1´ ……….0,0002
4´ ……….0,0002 . 4 = 0,0008
cos 45° 14´ = cos 45° 10´ - cos 4´ = 0,7050 - 0,0008 = **0,7042**

Příklad : Pomocí tabulky určete příslušné hodnoty velikosti úhlu : a) cos α = 0,2419
b) cos α = 0,8307 c) cos α = 0,9024
a) cos α = 0,2419 α **= 76°** b) cos α = 0,8307 α **= 33° 50´**
c) cos α = 0,9024 cos 25° 40´ = 0,9013
cos 25° 30´ = 0,9026 0,0013 …….. 10´
0,00013 ……. 1´
0,9024 - 0,9013 = 0,0011 0,0002 : 0,00013 = 2´
cos α = 0,9024 = cos (0,9026 - 0,0002) α =25° 30´ + 2´ = **25° 32´**

Příklad 25 : Pomocí tabulky určete hodnotu cosinus příslušného úhlu :
a) cos 50° 10´= b) cos 15° 50´= c) cos 87° 19´= d) cos 24° 45´=
e) cos 5° 59´ =

Příklad 26: Pomocí tabulky určete příslušné hodnoty velikosti úhlu :
a) cos α = 0,4848 b) cos α = 0,9001 c) cos α = 0,5848 d) cos α = 0,9006

6.4.4. tangens a kotangens úhlu



graf funkce tangens v intervalu 0° - 90°

Tangens úhlu je poměr délky protilehlé odvěsny a délky přilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku.

Kotangens úhlu je poměr délky přilehlé odvěsny a délky protilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku.

Kotangens úhlu je převrácená hodnota tangens úhlu.

Grafem funkce tangens úhlu je tangentoida.
Funkce tangens úhlu v intervalu 0° - 90° funkcí stoupající.

Grafem funkce kotangens úhlu je kotangentoida.
Funkce kotangens úhlu v intervalu 0° - 90° funkcí klesající.

Příklad 27 : Pomocí tabulky určete hodnotu tangens příslušného úhlu :

a) tg 50° 10´ = b) tg 15° 50´= c) tg 87° 19´= d) tg 24° 45´=
e) tg 5° 59´ = f) cotg 50° 10´= g) cotg 15° 50´= h) cotg 87° 19´=
i) cotg 24° 45´= j) cotg 5° 59´ = k) cotg $35^0 14´$ = l) cotg $48^0 52´$ =

Příklad 28: Pomocí tabulky určete příslušné hodnoty velikosti úhlu :

a) tg α = 0,5774 b) tg α = 0,8292 c) tg α = 3,5848 d) tg α = 1,9006
e) cotg α = 0,4734 f) cotg α = 0,9004 g) cotg α = 3,5 h) cotg α = 35

Přehledná tabulka goniometrických funkcí základních úhlů

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}.\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{3}.\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	N

cotg α	N	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}.\sqrt{3}$	0

Příklad 29 : Doplňte tabulku :

úhel α	sin α	cos α	tg α	cotg α
15^0 30´				
29^0 50´				
59^0 10´				
24^0 12´				
52^0 59´				
13^0 55´				
85^0 11´				
36^0 39´				

Příklad 30 : Doplňte tabulku :

sin α = 0,1736	cos α = 0,9596	tg α = 0,5890	cotg α = 11,430
sin α = 0,7898	cos α = 0,2588	tg α = 0,9657	cotg α = 1,675
sin α = 0,7744	cos α = 0,0929	tg α = 1,411	cotg α = 0,9827
sin α = 0,4894	cos α = 0,1893	tg α = 0,4445	cotg α = 0,2222
sin α = 0,5798	cos α = 0,5892	tg α = 3,555	cotg α = 1,567
sin α = 0,9712	cos α = 0,4873	tg α = 40,000	cotg α = 0, 6666
sin α = 0,1113	cos α = 0,5411	tg α = 0,569	cotg α = 2,458

Příklad 31 : Určete velikost úhlu v intervalu 0° - 90° : a) sin α = 0,5 b) tg α = 1

c) cos $\alpha = 0{,}5.\sqrt{2}$ d) cotg $\alpha = \sqrt{3}$ e) sin α = 0 f) cos α = 1

g) tg $\alpha = \sqrt{3}$ h) sin $\alpha = 0{,}5.\sqrt{3}$ i) cotg $\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{3}$ j) cotg α = 0

k) sin $\alpha = 0{,}5.\sqrt{2}$ l) cos $\alpha = 0{,}5.\sqrt{3}$ m) tg $\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{3}$ n) sin $\alpha = 0{,}5.\sqrt{2}$

o) cotg α = 1 p) sin α = 0,9063 r) tg α = 5,309 s) cotg α = 49,104
t) tg α = 0,1778 u) sin α = 0,0236 v) cos α = 0,4226 w) sin α = 0,7400

Příklad 32 : Sestrojte úhel α , pro který platí :

a) tg $\alpha = \frac{1}{3}$ b) cos $\alpha = \frac{2}{7}$ c) sin α = 0,6 d) cotg $\alpha = 1\frac{2}{3}$

6.4.5 Slovní úlohy na goniometrické funkce

Příklad 33 : Máme pravoúhlý trojúhelník ABC a pravým úhlem při vrcholu C. Vyjádřete následující poměry stran pomocí goniometrických funkcí : a) a : c; b) b : c; c) c : a;
d) a : b; e) b : a;

Příklad 34 : Je dán pravoúhlý trojúhelník EFG s pravým úhlem při vrcholu F. Úhel při vrcholu E označíme alfa, úhel při vrcholu G označíme beta. Vyjádřete pomocí goniometrických funkcí úhlu alfa a beta poměry stran.

Příklad 35 : V pravoúhlém trojúhelníku ABC je délka přepony c = 5 cm, b = 3 cm. Vypočítejte velikosti ostrých úhlů v trojúhelníku.

Příklad 36 : V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je úhel $\alpha = 38^0$ a délka přepony c = 18,2 cm. Vypočtěte délku b.

Příklad 37 : Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C mají délky 12 cm a 18 cm. Vypočtěte velikost ostrých úhlů trojúhelníka ABC.

Příklad 38 : V rovnoramenném trojúhelníku ABC má základna c = 12 cm a ramena délku 7 cm. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka a výšku na základnu.

Příklad 39 : Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH, jehož hrana podstavy má délku 5cm, výška je 10 cm. Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky EC, velikost úhlu, který určuje tělesová úhlopříčka EC a úhlopříčka AC, dále velikost úhlu, který určuje tělesová úhlopříčka EC s úhlopříčkou BE přední stěny ABFE.

Příklad 40 : Tětiva MN v kružnici k příslušná středovému úhlu MSN 132^0 má od středu S kružnice vzdálenost 82 mm. Vypočítejte poloměr kružnice.

Příklad 41 : Strany obdélníku mají délky v poměru 3 : 5. Jak velké úhly svírají úhlopříčky se stranami obdélníka ?

Příklad 42 :Určete dílky stran a velikosti vnitřních úhlů pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou c, je-li obsah trojúhelníka 224,46 m^2 a strana a = 25,8 cm.

Příklad 43 : Kružnice k určená středem S a poloměrem 26mm vytíná na přímce p tětivu délky 48 mm. Tětiva dělí kruh na dvě části. Vypočítejte obsah větší části.

Příklad 44 : Kružnice k s poloměrem r = 25 mm se dotýká ramen úhlu $\alpha = 50^0$. Jakou vzdálenost od vrcholu má střed kružnice k ?

Příklad 45 : Pod jakým úhlem stoupá silnice, je-li stoupání 10% .

Příklad 46 : Síla F o velikosti 2 000 N se rozkládá na dvě kolmé složky F_1 a F_2. Složka F_1 svírá s výslednicí úhel 32^0. Určete velikosti sil F_1 a F_2.

Příklad 47 : Jak vysoký je komín tepelné elektrárny, jestliže jeho vrchol vidíme ze vzdálenosti 96 metrů od paty komína pod úhlem 40^0?

Příklad 48 : Lanoví dráha z Nitry na vrchol Zoboru stoupá pod úhlem 15^0 a spojuje horní a dolní stanici s výškovým rozdílem 340 m. Jak dlouhá je lanová dráha ?

Příklad 49 : Přímá železniční trať vystoupí o 2,3 m na délce 100m. V jakém úhlu stoupá ?

Příklad 50 : Hák jeřábu je upevněný na laně o délce 20 m. Při větru se lano vychýlelo od svislé polohy o 5^0. Vypočítejte vzdálenost háku od polohy lana při bezvětří.

Příklad 51 : Pozorovatelna je umístěna na skále ve výšce 320 m nad hladinou moře. Z ní je vidět loď pod hloubkovým úhlem $9^0\ 20'$. Vypočítejte vodorovnou a vzdušnou vzdálenost lodě od pozorovatelny.

Příklad 52 : Příčný řez železničního náspu má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Horní základna tohoto lichoběžníku je 4,5 m, výška 2,6 m a úhel při základně má velikost 60^0. Jaká je dolní šířka náspu ?

Příklad 53 : Od paty stožáru elektrické sítě na břehu řeky vidíme vrchol dalšího stožáru na druhém břehu pod úhlem 19^0. Vypočítejte vzdálenost mezi stožáry, je-li výška stožáru
23,8 m. Paty stožárů leží ve vodorovné rovině.

Příklad 54 : Horská lanová dráha z Jánských Lázní na Černou horu je 3,2 km dlouhá a překonává výšku 645 m. Jaký je průměrný úhel stoupání ?

Příklad 55 : Jaký obsah mají svahy 450 m dlouhého výkopu po obou stranách železnice, má-li výkop průměrnou hloubku 3,2 metrů a sklon 35^0 ? Kolik kilogramů travního semene se vyseje, jestliže spotřeba na $100m^2$ je 0,75 kg semene ?

Příklad 56 : Letadlo letí vlastní rychlostí 720 km/hod z jihu na sever. O jaký úhel se odchýlí od severního směru, je-li rychlost východního větru 10 m/s ?

Souhrnná cvičení

1) V trojúhelníku ABC jsou vnitřní úhly u vrcholů A, B, C postupně označeny α, β, χ , přičemž platí : $\alpha : \beta : \chi = 1 : 5 : 6$. Nejdelší strana trojúhelníku má velikost 6 cm. Vypočítejte vzdálenost těžiště T trojúhelníku ABC od vrcholu A.

2) Zahrada má tvar pravoúhlého trojúhelníka s velikostmi odvěsen 32 m a 25 m. Jaké jsou vnitřní úhly tohoto trojúhelníka ? Vypočtěte stranu zahrady čtverce o stejném obsahu, jako má trojúhelníková zahrada.

3) Jeden úhel pravoúhlého trojúhelníka je 70° . Jeden úhel jiného pravoúhlého trojúhelníka je 20° . Jsou tyto dva trojúhelníky podobné ?

4) Rám obrazu je vyroben z lišty široké 6 cm. Rozměry obrazu jsou 74 cm a 57 cm. Jsou vnitřní a vnější hranice rámu podobné ?

5) Dokažte, že pro velikost stran a, b, c, trojúhelníka ABC a výšek platí : a : b : c =
$= \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$.

6) Jak vysoký je stan, jehož stín má délku 19,5 m, jestliže stín stojícího člověka o výšce 176 cm je v téže době dlouhý 2,4 m ?

7) Sestrojte úhel pomocí kterého budeme zmenšovat úsečky v poměru 2 : 3.

8) V trojúhelníku ABC je c = 16 cm, v_c = 8 cm. V trojúhelníku A'B'C', který je podobný s trojúhelníkem ABC , je c' = 24 cm. Vypočtěte v_c'.

9) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li a : b = 3 : 2, $\gamma = 60°$ c = 4 cm. **9)** nejdříve sestrojíme podobný trojúhelník, který nebude mít c = 4 cm ,

10) Vypočítejte úhel, s přesností na minuty, dvou sousedních stran kosočtverce, jehož jedna úhlopříčka měří 8 cm a strana kosočtverce 4,5 cm.

11) Vypočítejte velikost úhlopříček kosočtverce, je-li strana kosočtverce 28,7 mm a strany kosočtverce svírají 43° 20’.

12) Vypočítejte úhly, které svírá úhlopříčka obdélníku se stranami obdélníku, platí-li :
a) a = 50 mm, b = 80 mm b) a = 100 mm b = 60 mm.

13) Vypočítejte obsah pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána přepona c = 24 cm a α = 75 °.

14) Jaký je výškový rozdíl míst A a B na trati, která má stoupání 10° 20’, je-li vzdálenost míst A a B 125 metrů .

15) Žebřík dlouhý 4,5 metru je přistaven na vodorovné rovině ke svislé stěně tak, že dole je 1,09 m od stěny. Jaký úhel svírá žebřík s rovinou ?

16) Lanovka má přímou trať pod úhlem 40°, její délka je 870 metrů. Jaký je výškový rozdíl mezi dolní a horní stanicí a jaká je jejich vodorovná vzdálenost ?

17) Jak vysoký je štít budovy tvaru rovnoramenného trojúhelníku, je-li budova 15 m široká a sklon šikmých hran střechy je 38° ?

18) Kolik schodů je třeba na schodiště, které má sklon 36° 30’, je vysoké 15 metrů a jednotlivé schody jsou široké 27 cm ?

19) Kružnici o poloměru 30 cm je vepsána pěticípá hvězda. Vypočítejte vzdálenost dvou sousedních cípů hvězdy.

20) V lichoběžníku ABCD AB P CD je dána delší základna a = 56,3 cm výšku v = 20 cm
α = 60° β = 48°, které svírají ramena se základnou AB. Vypočítejte délku druhé základny CD a velikost ramen BC a AD.

21) Vypočítejte velikost úhlu, který svírají tečny vedené z bodu M ke kružnici k, která má střed v bodě S a poloměr 6 cm. |SM| = 12 cm.

22) Chlapci pouštěli draka na šňůře dlouhé 100 m. Jak vysoko vyletěl drak, jestliže velikost úhlu, který svírá napnutá šňůra s vodorovnou rovinou, odhadli na 60°.

23) Vypočtěte délku základny rovnoramenného trojúhelníka, jehož rameno je dlouhé 90 mm a úhel při základně má velikost 74°.

24) Tětiva AB v kružnici příslušná k středovému úhlu ASB velikosti 132 ° má od středu S kružnice k vzdálenost 82 mm. Vypočtěte největší možnou tětivu této kružnice.

25) Přímá železniční trať má stoupání 16 promile. Pod jakým úhlem stoupá ?

26) Fotbalová branka je široká 7 metrů a vysoká 2 metry. Značka pokutového kopu je od branky vzdálena 11 metrů. a) Jaký střelecký úhel má k dispozici střelec, který kope pokutový kop? b) Pod jakým největším úhlem do výšky může vystřelit fotbalista, který kope pokutový kop, aby branku nepřestřelil ? c) Pod jakým úhlem musí vystřelit fotbalista, který kope pokutový kop, aby trefil pravý horní roh brány ? Jak daleko od značky je vzdálen roh branky ?

27) Z okna ležícího 8 m nad horizontální rovinou vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu 53^0 20´ a v hloubkovém úhlu 14^0 15´. Jak vysoká je věž ?

28) * Vrchol továrního komínu se jeví z místa A, který leží s patou komína na horizontální přímce, ve výškovém úhlu $4{,}5^0$. Když se k němu přiblížíme o 270 metrů, jeví se vrchol komína ve výškovém úhlu právě dvojnásobném. Jak vysoký je komín?

Výsledky příkladů

1 a) n = 10 cm, c = 6 cm , **b)** n = 1,5 cm, a = 4 cm ,
3 a) ne, ale je podobný ΔABC s Δ A'C'B' , **b)** ano , **c)** ano , **d)** ne , **e)** ne , **f)** ano , **g)** ano , **h)** ano , **i)** ne , **j)** ano,
6) Δ ABC ~ ΔAYX Vuu $\frac{|AY|}{|AB|} = k = \frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AX|}{2.|AX|} = \frac{1}{2}$ $|AY| = \frac{1}{2}|AB|$,
7) poměr objemů k^3 poměr povrchů k^2, **9)** a′= 4,2 cm, b′= 3,9 cm, c′= 3 cm
10) $\alpha = \chi_1$ $\beta = \chi_2$ **13)** 4,368 cm, 4,032 cm, 5,04 cm; **14)** 5,44 m
16) 5,5 km, **17)** 1,84 km, 2,4 km , 1,5 km, **18)** 1 : 700 000 **19)** 0,78 cm,
24) a) 29^0; **b)** 64^0 10′ ; **c)** 35^0 47′ ; **d)** $64^0$14′;
25) a) 0,6406; **b)** 0,9621; **c)** 0,0474; **d)** 0,9081; **e)** 0,9945;
26) a) 61^0; **b)** 25^0 50′ ; **c)** 54^0 13′; **d)** 25^0 46′;
27) a) 1,199; **b)** 0,2836; **c)** 21,344; **d)** 0,4610; **e)** 0,1048; **f)** 0,8342; **g)** 3,526;
h) 0,0473; **i)** 2,169; **j)** 9,541; **k)** 1,4158; **l)** 0,87338;
28) a) 30^0; **b)** 39^0 40′; **c)** $74^0$25′; **d)** 62^0 19′; **e)** $64^0$40′; **f)** 48^0 ; **g)** 15^0 56′;
29)

úhel α	sin α	cos α	tg α	cotg α
15^0 30′	0,2588	0,9636	0,2773	3,606
29^0 50′	0,4975	0,8675	0,5735	1,744
59^0 10′	0,8587	0,5125	1,675	0,5969
24^0 12′	0,40988	0,91216	0,4494	0,2254
52^0 59′	0,79843	0,60203	1,3262	075405
13^0 55′	0,2405	0,97065	0,24775	3,5065
85^0 11′	0,99643	0,08401	11,8685	0,0843
36^0 39′	0,59696	0,80228	0,74405	1,3438

30)

α = 10^0	α = 16^0 20′	α = 30^0 30′	α = 5^0
α = 52^0 10′	α = 75^0	α = 44^0	α =30^0 50′
α = 50^0 45′	α = 84^0 40′	α = 54^0 40′	α = 45^0 30′
α = 29^0 18′	α = 79^0 5′	α = 23^0 57′	α = 77^0 28′
α = 35^0 26′	α = 53^0 53′	α = 74^0 17′	α = 32^0 33′
α = 76^0 13′	α = 60^0 50′	α = 88^0 34′	α = 56^0 18′
α = 6^0 23′	α = 57^0 15′	α = 29^0 38′	α = 22^0 9′

31) a) 30^0; **b)** 45^0; **c)** 45^0; **d)** 30^0; **e)** 0^0; **f)** 0^0; **g)** 60^0; **h)** 60^0; **i)** 60^0; **j)** 90^0; **k)** 45^0;
l) 30^0; **m)** 30^0; **n)** 45^0; **o)** 45^0; **p)** 65^0; **r)** 79^0 20′; **s)** $1^0$10′; **t)** $10^0$5′′; **u)** 1^0 21′;
v) 65^0; **w)** $47^0$43′;
33) a) sin α , cos β ; **b)** cos α , sin β ; **c)** není základní funkce; **d)** tg α , cotg β ;
e) tg β , cotg α ;
35) 53^0, 37^0;**36)** 14,3 cm;**37)** 33^0 40′; 56^0 20′; **38)** 31^0; 3,6 cm;**39)** 12,2 cm; 54^0 40′; 24^0;
40) 20 cm;**41)** 31^0;**42)** b = 17,4 m; c = 31,1 cm; α = 56^0; β = 34^0;**43)** 1 567 mm^2;
44) 59 mm;**45)** 6^0; **46)** 1 060N; 1 700N;**47)** 79,8 m;**48)** 1 314 m;**49)** 1^0 20′;**50)** 1,74 m;
51) 1 950 m; 1 970m;**52)** 7,5 m;**53)** 69 m;**54)** 11^0 40′;**55)** 5 040 m^2; 37,8 kg;**56)** 2^0 50′;

Výsledky souhrnných cvičení

1) 3,89 cm,**2)** 38° , 52° , 20 m ,**3)** ano ,**4)** nejsou podobné ,**5)** na základě vzorce pro obsah trojúhelníka ,

6) 14,3 cm ,**8)** 12 cm ,**9)** nejdříve sestrojíme podobný trojúhelník, který nebude mít c = 4 cm ,
10) 54° 32’ ,**11)** 21,2 mm 53,3 mm ,**12a)** 58° 32° , **b)** 30° 58’ 59° 2’ ,**13)** 72 cm^2 ,
14) 22,4 m ,**15)** 76° ,**16)** 559 m, 666 m ,**17)** 5,9 m ,**18)** 75 ,**19)** 35,3 cm ,
20) c = 26,7 cm b = 26,9 cm d = 23,1 cm ,**21)** 30° , **22)** 86,6 m ,**23)** 49,6 mm ,**24)** 40,4 cm ,
25) 1° , **26 a)** 35° 20’ , **b)** 10° 10’ , **c)** 9° 50’ 11,7 m ,**27)** 50,3 m**;28)** 43,2m;