8. Základy teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnost se zabývá matematickými zákonitostmi, které se projevují v náhodných pokusech. Tyto zákonitosti mají opodstatnění jen při dostatečně velkém počtu pokusů.

Náhodné pokusy jsou pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům. Tyto výsledky závisí nejen na předepsaných podmínek, ale také na náhodě.

8.1. Jev, průnik a sjednocení jevů

U každého náhodného pokusu jsme schopni předem vyjmenovat všechny možné výsledky, a to tak, že se navzájem vylučují a jeden z nich nastane vždy. Tuto množinu možných výsledků většinou označujeme Ω, její libovolný prvek pak zpravidla označujeme ω.
Představte si situaci, že házíte klasickou kostkou.

Podmnožiny množiny možných výsledků nazýváme **jevy** a označujeme A, B, C…..
Prázdnou množinu nazýváme **nemožný jev** (na naší kostce padne sedmička).
Množinu Ω nazýváme **jistý jev** (padne jednička až šestka).

O jevech platí vše, co platí o množinách.

Je-li $\omega \in$ A, říkáme, že výsledek ω je **příznivý jevu A**.
Je-li A $\subset$ B, říkáme, že jev A je **podjevem jevu B**.
Jev A$\cup$B (**sjednocení jevů A a B**) nastává právě tehdy, nastane-li alespoň jeden z jevů A nebo B.
Jev A $\cap$ B (**průnik jevů A a B**) nastává tehdy, nastanou-li oba jevy A a B.¨
Je-li A $\cap$ B = $\emptyset$, říkáme, že **jevy A a B se navzájem vylučují**.
Jev A*, který nastává právě tehdy, když jev A nenastává, nazýváme **jevem opačným k jevu A** v množině Ω.

Jevy A a B jsou **nezávislé**, jestliže uskutečnění jednoho jevu nemá vliv na uskutečnění nebo neuskutečnění jevu druhého

8.2. Pravděpodobnost

<u>Předpokladem dobrého zvládnutí dalšího učiva je bezpodmínečná znalost učiva 6. ročníku - téma 9. Kombinatorika.</u>

Není uvedeno v učebnicích :

a) 5!
b) vzorec kombinačního čísla n nad k = n! : k! . (n-k)!
c) 5 nad 3 = 10
d) rozlišení na kombinace, variace, permutace
e) Kolik vznikne trojúhelníků ze 7 bodů ? (35)
f) Kolik pětic lze vybrat z osmi čísel ? (15)
g) Kolik pětic z osmi čísel lze vybrat, aby tři čísla byla správně ? (30)
h) Kolik pětic u osmi čísel lze vybrat, aby alespoň tři byly správně ? (46)
i) Ze 7 zelených, 8 žlutých, 5 modrých, 6 růžových a 6 fialových kuliček lze vybrat
   - různých pětic? 32 nad 5 = 201 376
   - jednobarebných pětic, 7 nad 5 + 8 nad 5 …. = 90
   - pětibarevných pětic 7 . 8. … = 10 080

j) vzorec na variace V (k; n) = n! : (n-k)!
k) V (5;8) = 6720 V (3;8) =210
l) K sestavení vlaky složené ze tří různobarevných pruhů lze použít barvu bílou, červenou, modrou, zelenou, žlutou. Kolik vlajek lze sestavit ? V (3;5) = 60
Kolik z nich má modrý pruh uprostřed ? V (2;4) = 12 Kolik z nich má modrý pruh ? (36)
m) P (n) = n!
n) Kolika způsoby si může ke čtyřbokému stolu sednout čtyři lidé ? (24).

8.2.1. Pravděpodobnost jevu

Pravděpodobnost jevu A vypočteme

$P (A) = \frac{X}{Y}$ kde : X – počet příznivých jevů

Y – počet všech možných jevů

P (A) = 0 pravděpodobnost nemožného jevu
P (A) = 1 pravděpodobnost jistého jevu
$0 \le P (A) \le 1$ pravděpodobnost libovolného jevu A

Pravděpodobnost, která vychází jako desetinné číslo, vyjadřujeme v procentech.

P (A) = 0,47 pravděpodobnost je 47 %
P (B) = 0,3612 pravděpodobnost je 36,12 %

Příklad : V osudí je 3 bílé koule a 7 černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme :
a) bílou kouli
b) černou kouli
c) červenou kouli

a) bílou kouli počet příznivých jevů : 3
počet možných jevů : 10
pravděpodobnost $P (A) = \frac{3}{10} = 0,3$ **pravděpodobnost je 30 %**

b) černou kouli
počet příznivých jevů : 7
počet možných jevů : 10
pravděpodobnost $P (A) = \frac{7}{10} = 0,7$ **pravděpodobnost je 70 %**

c) červenou kouli
počet příznivých jevů : 0
počet možných jevů : 10
pravděpodobnost $P (A) = \frac{0}{10} = 0$ **pravděpodobnost je 0 %**

8.2.2. Sčítání pravděpodobnosti

Příklad : Házíme třemi kostkami.Určete jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce bude šestka .

Jev A_1 – pouze na první kostce bude šestka $P(A_1) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

Jev A_2 – pouze na druhé kostce bude šestka $P(A_2) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

Jev A_3 – pouze na třetí kostce bude šestka $P(A_3) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

Jev B – na jedné kostce bude šestka $P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{75}{216}$

Příklad : Máme dvě klasické kostky s číslicemi.

a) jaká je pravděpodobnost, že na obou bude číslice 6,
b) jaká je pravděpodobnost, že na obou bude sudé číslo,
c) jaká je pravděpodobnost, že na jedné kostce bude liché číslo a na druhé sudé číslo,
d) součet číslic na obou kostkách bude 7.

a) jaká je pravděpodobnost, že na obou bude číslice 6,

počet příznivých jevů : 1

počet možných jevů : 36 (každou číslici jedné kostky je nutno kombinovat s každou číslicí druhé kostky)

pravděpodobnost $P(A) = \frac{1}{36} = 0,0278$ **pravděpodobnost je 2,78 %**

b) jaká je pravděpodobnost, že na obou bude sudé číslo,

počet příznivých jevů : 9 (tři možnosti na jedné kostce je nutné kombinovat s třemi možnostmi na druhé kostce)

počet možných jevů : 36

pravděpodobnost $P(A) = \frac{9}{36} = 0,25$ **pravděpodobnost je 25 %**

c) jaká je pravděpodobnost, že na jedné kostce bude liché číslo a na druhé sudé číslo,

počet příznivých jevů : 18 (tři možnosti lichého čísla na první kostce je nutné kombinovat s třemi možnostmi sudého čísla na druhé kostce a naopak)

počet možných jevů : 36

pravděpodobnost $P(A) = \frac{18}{36} = 0,5$ **pravděpodobnost je 50 %**

d) součet číslic na obou kostkách bude 7

počet příznivých jevů : 6 (výčet dvojic : 6 1, 5 2, 4 3, 3 4, 2 5, 1 6)

počet možných jevů : 36

pravděpodobnost $P(A) = \frac{6}{36} = 0,1667$ **pravděpodobnost je 16,67 %**

Příklad : Ve třídě je 18 dívek a 13 chlapců. Pro dozor se určuje 5 žáků. Jaká je pravděpodobnost, že to budou 3 dívky a dva chlapci?

počet příznivých jevů : $K(3;18) . K(2;13) = 63\,648$

počet možných jevů : $K(5;31) = 169\,911$

pravděpodobnost $P(A) = \frac{63648}{169911} = 0,3746$ **pravděpodobnost jevu je 37,46 %**

Příklad 1 : Jaká je pravděpodobnost, že ze 7 mužů a 4 žen při losování šestičlenné skupiny vybereš právě dvě ženy?

Příklad 2 : Z úplné sady karet (32 kusů) vytáhneme 3 karty. Jaká je pravděpodobnost, že budou všechny barvy červené nebo všechny esa?

8.2.3. Pravděpodobnost opačného jevu :

Má-li jev A pravděpodobnost P (A), pak pravděpodobnost opačného jevu je P (A´).

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Příklad : Jaká je pravděpodobnost, že nepadne na kostce číslice 5?

Pravděpodobnost, že na kostce padne číslice 5 je $P(A) = \frac{1}{6}$.

Pravděpodobnost, že na kostce nepadne číslice 5 je $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} =$

$= 0,8333$ ….. 83,33 %.

Jiný postup : jestliže nepadne číslice 5, pak padne číslice 1, 2, 3, 4 nebo 6. Neboli

$5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,8333.$

Příklad : Ve třídě je 30 žáků, z nichž 5 nemá vypracovaný domácí úkol. V hodině budou vyvoláni 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden žák, který nemá domácí úkol ?

Alespoň jeden žák bez domácího úkolu (DU) je totéž jako jeden žák bez DU, dva žáci bez DU, tři žáci bez DU, čtyři žáci bez DU (všichni vyvolaní žáci)

Opačný jev : všichni vyvolaní žáci budou mít DU.

počet příznivých **opačných** jevů : $K(4;25) = 12\,650$
počet možných jevů : $K(4;30) = 27\,405$

pravděpodobnost $P(A') = 1 - \frac{12650}{27405} = 0,538$ **pravděpodobnost je 53,8 %**

8.3. Podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B je pravděpodobnost jevu A určovaná za podmínky, že jev B již předem nastal s pravděpodobností $P(B) \neq 0$.

Příklad : V osudí je 9 bílých koulí a 1 červená koule. Vytáhneme jednu kouli, vrátíme ji a přidáme jednu kouli téže barvy. Pak vytáhneme jednu kouli podruhé. Určete :
a) jaká je pravděpodobnost, že v obou tazích vytáhneme červenou kouli
b) jaká je pravděpodobnost, že v obou tazích vytáhneme bílou kouli .

Řešení a : $P(Č_1) = \frac{1}{10}$

$P(Č_2) = \frac{2}{11}$

$P(Č_2/Č_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{110} = 0,018$ 1,8 % podmíněná pravděpodobnost

b) : P (B_1) = $\frac{9}{10}$

P (B_2) = $\frac{10}{11}$

P (B_2/B_1) = $\frac{9}{10}.\frac{10}{11} = \frac{9}{10} = 0,818$ 81,8 % podmíněná pravděpodobnost

8.4. Užití pravděpodobnosti v praxi

Příklad 3 : Jaká je pravděpodobnost, že ze 7 mužů a 4 žen při losování šestičlenné skupiny vybereme skupinu, : a) kde budou alespoň dvě ženy, b) kde budou maximálně dvě ženy.

Příklad 4 : V obchodě mají 12 hrnečků, z nichž 3 jsou poškozené. Zákazník si koupí 3 hrnečky. Jaká je pravděpodobnost, že si vybral právě všechny tři poškozené hrnečky?

Příklad 5 : Ve Sportce se z 49 čísel losuje 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že získáme :

a) 1. pořadí (uhodneme všechna čísla),
b) 2. pořadí (uhodneme pět čísel),
c) 3. pořadí (uhodneme čtyři čísla),
d) 4. pořadí (uhodneme tři čísla).

Příklad 6 : Státní vlajka se skládá ze tří vodorovných pruhů. K dispozici jsou barvy : bílá, červená, modrá, zelená a žlutá.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při losování vlajek si vybereme tu vlajku, která má modrý pruh uprostřed ?

b) Jaká je pravděpodobnost, že při losování si vybereme vlajku, která má modrý pruh ?

Příklad 7 : V bedně je 30 výrobků, z nichž 3 jsou vadné. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 5 náhodně vybranými výrobky bude maximálně jeden vadný?

Příklad 8 : Odběratel dostává každý týden dodávku 50 kusů zboží. Dodávku přijme, jestliže mezi namátkou vybranými a zkontrolovanými 10 kusy není ani jeden vadný výrobek.

a) Jaká je pravděpodobnost, že dodávku přijme, jestliže dodávka obsahuje ve skutečnosti 5 vadných výrobků ?

b) Jaká je pravděpodobnost, že dodávku nepřijme, jestliže dodávka obsahuje ve skutečnosti 5 vadných výrobků ?

Souhrnná cvičení

1) Jaká je pravděpodobnost výhry v losovací hře, kdy ze 49 znaků mezi 6 vytaženými znaky budou tři znaky, které máme my mezi našimi 6 znaky ?

2) V bedně je 30 výrobků, z nichž tři jsou vadné. Jaká je pravděpodobnost jevu A, že mezi 5 náhodně vybranými výrobky bude nejvýše 1 vadný ?

3) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne :
a) dvě šestky b) jedna pětka c) obě lichá čísla d) jedna čtyřka a jedna pětka,

4) Osudí je 5 bílých, 7 červených a 6 modrých kuliček. Budeme tahat trojice. Jaká je pravděpodobnost , že vytáhnu : a) trojici bílých kuliček b) trojici červených kuliček c) trojici kuliček stejné barvy d) trojic kuliček různých barev
e) trojici kuliček, kde dvě budou mít vždy stejnou barvu,

5) Ze7 čísel se losuje trojice. Jaká je pravděpodobnost, že uhodneme : a) všechny tři čísla
b) pouze dvě čísla c) pouze jedno číslo d) neuhodneme žádné číslo

6) Máme k dispozici všechny možné tříbarevné vlajky, které jsou sešity ze tří pruhů, které lze sešít z barev : bílá, červená, modrá, zelená a žlutá. Jaká je pravděpodobnost, že když si vyberu jednu z nich, že bude mít : a) modrý pruh uprostřed b) modrý pruh

7) Ze 7 mužů a 4 žen vytváříme šestičlenné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že ze všech skupin vybereme : a) šestici, ve které budou právě dvě ženy,
b) šestici, kde budou alespoň dvě ženy c) šestici, kde budou maximálně dvě ženy.

Výsledky příkladů

1) 45,45 % ,
2) 1,2 % ,
3 a) 80,3 %, **b)** 65,15 %,
4) 0,45 %,
5 a) 0,0000072 % , **b)** 0,00184 % , **c)** 0,09686 % , **d)** 1,76 % ,
6 a) 20%, **b)** 60 % ,
7) 93,6 % ,
8 a) 31,05 % , **b)** 68,95 %,

Výsledky souhrnných cvičení

1) 1,765 % ,
2) 93,6 % ,
3 a) 2,77 % , **b)** 27,7 % , **c)** 25 % , **d)** 5,5 % ,
4 a) 1,22 % , **b)** 4,29 % , **c)** 7,97 % , **d)** 25,74 % , **e)** 66,30 % ,
5 a) 2,86 % , **b)** 34,29 % , **c)** 51,43 % , **d)** 11,43 %
6 a) 20 % , **b)** 60 % ,
7 a) 45,45 % , **b)** 80,30 % , **c)** 65,15 % ,