4. Lineární nerovnice a jejich soustavy

$15 > 10$	ostrá nerovnost	
$5.10 \geq 50$	neostrá nerovnost	(používáme pouze čísla)

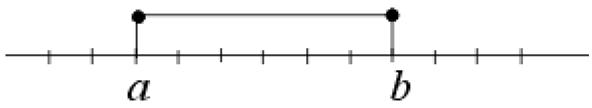
ZNAKY NEROVNOSTI:

$>$	je větší než
$<$	je menší než
$\geq$	je větší nebo rovno
$\leq$	je menší nebo rovno

- Řešením nerovnice je v oboru reálných čísel **interval**, v oboru přirozených a celých čísel množina bodů.
- Interval nebo množinu bodů můžeme vyjádřit pomocí číselné osy a zapíšeme.

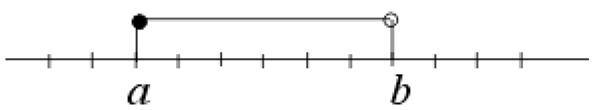
Opakování : **Zobrazení a zápis intervalů**

a) **uzavřený interval**



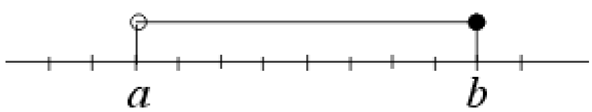
čísla a,b – krajní body intervalu
číslo a patří do intervalu (plné kolečko)
číslo b patří do intervalu (plné kolečko)
$a \leq x \leq b \quad x \in \langle a, b \rangle$

b) **interval polouzavřený zleva**



číslo a patří do intervalu (plné kolečko)
číslo b nepatří do intervalu (prázdné kolečko)
$a \leq x < b \quad x \in \langle a, b)$

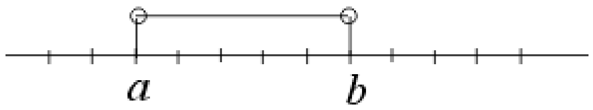
c) **interval polouzavřený zprava**



číslo a nepatří do intervalu (prázdné kolečko)
číslo b patří do intervalu (plné kolečko)

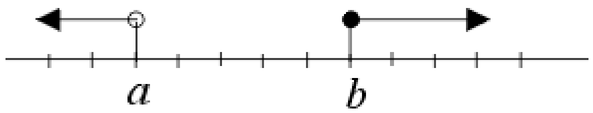
$a < x \leq b \quad x \in \langle a, b \rangle$

d) **otevřený interval**



číslo a nepatří do intervalu (prázdné kolečko)
číslo b nepatří do intervalu (prázdné kolečko)
$a < x < b \quad x \in (a, b)$

e) krajní hodnotou intervalu může být i nekonečno (∞) a minus nekonečno $(-\infty)$, pak se jedná vždy o polouzavřený nebo otevřený interval.



$x < a \quad x \in (-\infty, a)$
$x \geq b \quad x \in \langle b, \infty)$

4.1. Lineární nerovnice.

$4x + 15 > 40$ lineární nerovnice

Každou nerovnici lze ekvivalentními úpravami převést na jeden z těchto tvarů :
$ax + b > 0$ $ax + b \geq 0$ $ax + b < 0$ $ax + b \leq 0$, kde <u>a</u> i <u>b</u> reálné číslo.

Ekvivalentní úpravy nerovnice : 1) k oběma stranám nerovnice můžeme přičíst (odečíst) libovolné číslo,
2) obě strany nerovnice můžeme násobit (dělit) kladným číslem,
3) obě strany nerovnice můžeme násobit (dělit) záporným číslem, ale musíme změnit orientaci nerovnice na opačnou. Např. > na < nebo ≤ na ≥.

Pro výsledek je důležité v jakém číselném oboru řešíme danou nerovnici.

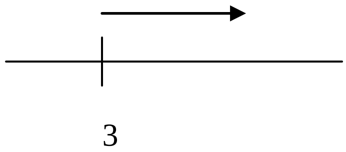
Zopakujeme si číselné obory :
obor přirozených čísel (1, 2, 3 ……20, 21 …..)
obor celých čísel (….. -20, -19, … -1, 0, 1, 2 ….20 ….)
obor racionálních čísel (. -1,4 … $-1\frac{1}{10}$ …. 0 … 0,5 .. $2\frac{1}{4}$ ..)
obor racionálních čísel (sjednocení množin racionálních čísel a iracionálních čísel)
obor komplexních čísel – nebudeme na základní škole počítat.

DOHODA : pokud v příkladě nebude určen číselný obor, ve kterém máme řešit nerovnici nebo soustavu nerovnic, tak tím oborem bude množina všech reálných čísel.

Výsledek řešení nerovnice můžeme uvádět : a) v algebraické podobě $x > 7$

b) výčtem x = (3; 4; 5; 6)

c) graficky



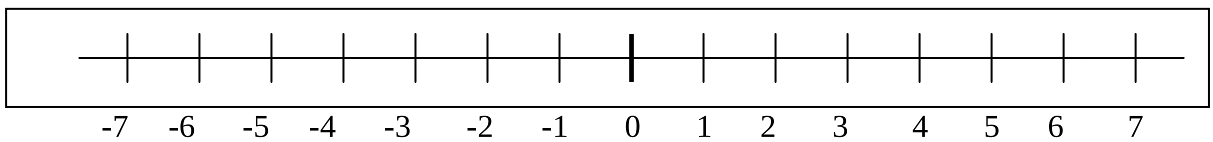
4.2. Řešení lineárních nerovnic.

Lineární nerovnice řešíme obdobným způsobem jako lineární rovnice.

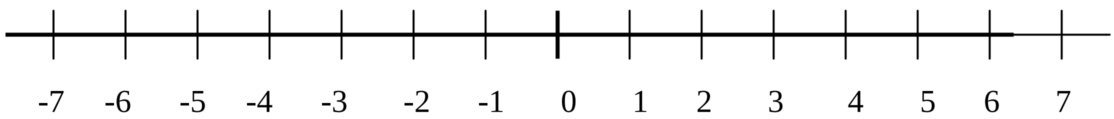
Příklad : Vyřešte lineární nerovnici $3x - 2 < x + 4$ v oboru
a) přirozených čísel
b) v obru celých čísel
c) v oboru reálných čísel

$$3x - 2 < x + 4$$
$$3x - x < 4 + 2$$
$$2x < 6$$
$$x < 3$$

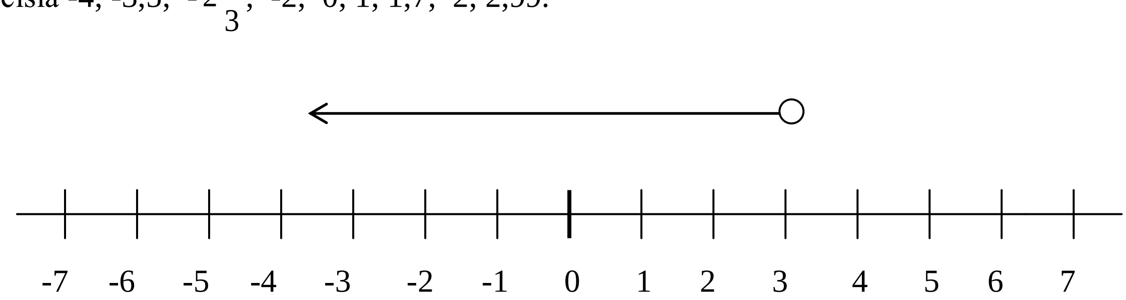
a) řešením v oboru přirozených čísel je množina $x \in \{1, 2\}$, která je dvouprvková.



b) řešením v oboru celých čísel je množina $x \in (-\infty;3)$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -2; 0; 1; 2.



c) řešením v oboru reálných čísel je množina $x \in (-\infty,3)$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -3,5; $-2\frac{1}{3}$; -2; 0; 1; 1,7; 2; 2,99.



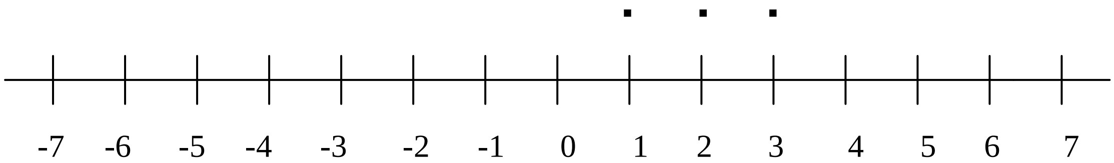
(Technická poznámka : prázdné kolečko nad číslem 3 by mělo totožné s počátkem šipky .)

Příklad : Vyřešte lineární nerovnici $3x - 2 \leq x + 4$ v oboru a) přirozených čísel
b) v obru celých čísel c) v oboru reálných čísel

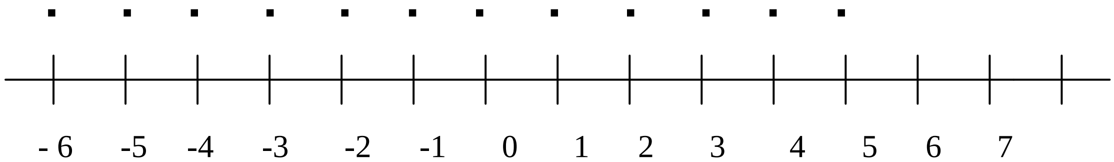
/ Rozdíl proti předcházejícímu příkladu je pouze v tom, že zápis připouští také rovnost. /

$$3x - 2 \leq x + 4$$
$$3x - x \leq 4 + 2$$
$$2x \leq 6$$
$$x \leq 3$$

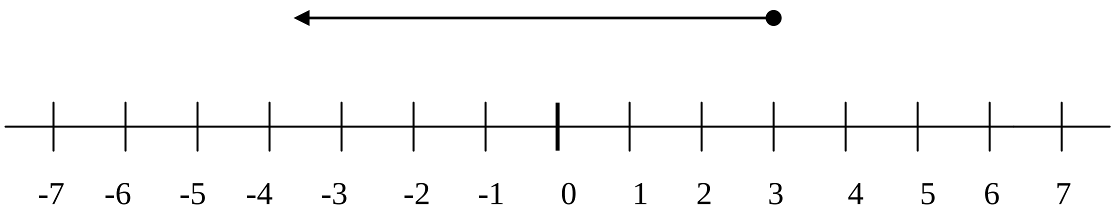
a) řešením v oboru přirozených čísel je množina $x \in \; 1; 2; 3$, která obsahuje tři prvky.



b) řešením v oboru celých čísel je množina $x \in (\infty \;;\; 3 >$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -2; 0; 1; 2, ale také 3.



c) řešením v oboru reálných čísel je množina $x \in (\infty \;;\; 3 >$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -3,5; $-2\frac{1}{3}$; -2; 0; 1; 1,7; 2; 2,7; 2,99, ale také 3.



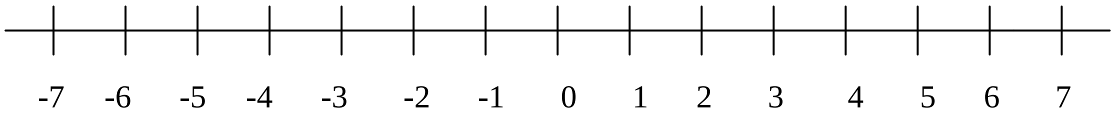
Příklad : Vyřešte lineární nerovnici $1,5x + 1 \leq \frac{x}{3}$ v oboru a) přirozených čísel
b) v obru celých čísel c) v oboru reálných čísel

$$1,5x + 1 \leq \frac{x}{3}$$

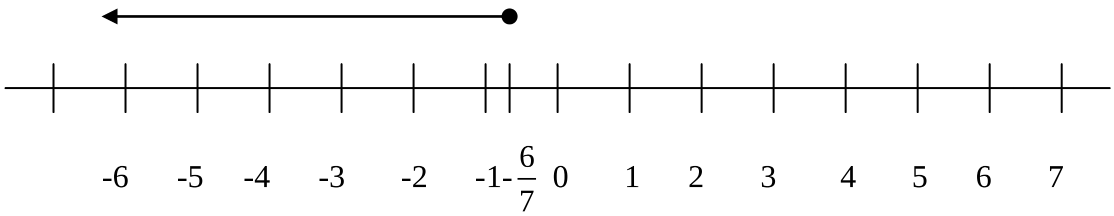
$$4,5x + 3 \leq x$$
$$3,5x \leq -3$$
$$x \leq -\frac{6}{7}$$

a) v oboru přirozených čísel není žádné číslo x, pro které platí, $x \leq -\frac{6}{7}$

b) řešením v oboru celých čísel je množina $x \in (\infty; -\frac{6}{7}>$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -3; -2; -1.



c) řešením v oboru reálných čísel je množina $x \in (\infty; -\frac{6}{7}>$, která obsahuje nekonečně mnoho prvků, mimo jiné čísla -4; -3,5; $-2\frac{1}{3}$; -2; -1, ale také $-\frac{6}{7}$.



Příklad 1 : Řešte nerovnice v oboru přirozených čísel :

a) 8x -19 + 10x < 70 – 10x
b) 24x – 18 < (3x – 4) . 15 – 20x + 50
c) 5 + 3x < 4x – 1 – x
d) 2x + 3 ≥ 6x – 5 – 4x
e) 5x – 3,2 >2x – 1,7
f) $\frac{5x}{4}+1,5 \leq x+\frac{1}{3}$
g) $1,2x+3 \leq \frac{2x}{3}+4$
h) $1+\frac{4x}{3} \leq 0,5x+3$
ch) $\frac{2x-1}{2}+2 < \frac{x+2}{3}-3$
i) $\frac{5x+4}{2} \leq \frac{2x+3}{5}$
j) $\frac{3x+4}{2}-\frac{2}{3} < \frac{5x-2}{3}+1$

Příklad 2 : Řešte nerovnice v oboru celých čísel :

a) 8x -19 + 10x < 70 – 10x
b) 24x – 18 < (3x – 4) . 15 – 20x + 50
c) 5 + 3x < 4x – 1 – x
d) 2x + 3 ≥ 6x – 5 – 4x
e) 5x – 3,2 >2x – 1,7
f) $\frac{5x}{4}+1,5 \leq x+\frac{1}{3}$
g) $1,2x+3 \leq \frac{2x}{3}+4$
h) $1+\frac{4x}{3} \leq 0,5x+3$
ch) $\frac{2x-1}{2}+2 < \frac{x+2}{3}-3$
i) $\frac{5x+4}{2} \leq \frac{2x+3}{5}$
j) $\frac{3x+4}{2}-\frac{2}{3} < \frac{5x-2}{3}+1$

Příklad 3 : Řešte nerovnice v oboru záporných reálných čísel :

a) 8x -19 + 10x < 70 – 10x
b) 24x – 18 < (3x – 4) . 15 – 20x + 50
c) 5 + 3x < 4x – 1 – x
d) 2x + 3 ≥ 6x – 5 – 4x
e) 5x – 3,2 >2x – 1,7
f) $\frac{5x}{4}+1,5 \leq x+\frac{1}{3}$
g) $1,2x+3 \leq \frac{2x}{3}+4$

h) $1 + \dfrac{4x}{3} \leq 0{,}5x + 3$

ch) $\dfrac{2x-1}{2} + 2 < \dfrac{x+2}{3} - 3$

i) $\dfrac{5x+4}{2} \leq \dfrac{2x+3}{5}$

j) $\dfrac{3x+4}{2} - \dfrac{2}{3} < \dfrac{5x-2}{3} + 1$

Příklad 4 : Řešte nerovnice v oboru reálných čísel :

a) 8x -19 + 10x < 70 – 10x
b) 24x – 18 < (3x – 4) . 15 – 20x + 50
c) 5 + 3x < 4x – 1 – x
d) 2x + 3 ≥ 6x – 5 – 4x
e) 5x – 3,2 >2x – 1,7
f) $\dfrac{5x}{4} + 1{,}5 \leq x + \dfrac{1}{3}$
g) $1{,}2x + 3 \leq \dfrac{2x}{3} + 4$

h) $1 + \dfrac{4x}{3} \leq 0{,}5x + 3$

ch) $\dfrac{2x-1}{2} + 2 < \dfrac{x+2}{3} - 3$

i) $\dfrac{5x+4}{2} \leq \dfrac{2x+3}{5}$

j) $\dfrac{3x+4}{2} - \dfrac{2}{3} < \dfrac{5x-2}{3} + 1$

Příklad 5 : Dokažte, že nerovnost (a – b)^2 < (a – b + 1)^2 - 2.(a – b) platí pro libovolná čísla a, b.

Příklad 6 : Je možné, aby součet čísel a + b byl někdy menší než číslo <u>a</u> ?

Příklad 7 : Řešte nerovnice v oboru reálných čísel :

a) 5.(x – 1) – x.(7 – x) < x^2
b) (x – 3)^2 < x.(x + 2) + 3
c) (4x – 1)^2 + 3x < (8x + 1) . (2x – 4)
d) $\sqrt{2x-8} < \sqrt{x+2}$
e) $\sqrt{3-5x} < \sqrt{6+2x}$
f) $5.\left[3y + 2.\ 1-y\ \right] - 2.\left[4-3.\ y+2\ \right] > 0$
g) $2.\ x-7\ + 3.\left[1-2.\ 3-2x\ \right] < 6 - x$
h) (4x – 1) . (2x + 2) < (8x – 3) . (x + 1)
ch) (x – 3)^2 – (x + 2)^2 > 5
i) (3x – 4) .(6x + 1) + (15 -9x) . (2x + 1) ≥ 1
j) (2x + 3)^2 – (x – 4)^2 ≤ (3x – 5) . (x + 3)

Příklad : Řešte nerovnici $\dfrac{3x-2}{6-x} - 1 > 0$ v intervalu < 0 ; 5 >

1. etapa – určení podmínky řešitelnosti 6 ≠ x Toto omezení je stejně mimo interval řešitelnosti.

2. etapa – úprava nerovnice

$$\frac{3x-2-6+x}{6-x} > 0$$

$$\frac{4x-8}{6-x} > 0$$

Zlomek je kladný, když čitatel i jmenovatel je kladný (záporný).

4x – 8 > 0	∧	6 – x > 0	∨	4x – 8 < 0	∧	6 – x < 0
4x > 8	∧	6 > x	∨	4x < 8	∧	6 < x
x > 2	∧	6 > x	∨	x < 2	∧	6 < x
2 < x < 6				prázdná množina		

3. etapa – závěrečná podmínka : Vzhledem k tomu, že nerovnici řešíme v intervalu < 0 ; 5 > a současně platí podmínka 2 < x < 6 je výsledným řešení množina **X ∈ (2 ; 5 > .**

Příklad 8 : Řešte nerovnici $\frac{x+6}{2x-7}+2 > 0$ v intervalu < 2 ; 7 >.

Příklad 9 : Řešte nerovnici $\frac{2x+5}{3x-2}-1 < 0$ v intervalu (-3 ; 9 >.

4.3. Soustava lineárních nerovnic s jednou neznámou.

Řešit soustavu dvou nerovnic o jedné neznámé znamená určit množinu všech hodnot proměnné x, pro které současně platí obě nerovnice. Množina všech řešení soustavy dvou nerovnic je průnik množiny všech řešení jedné nerovnice s množinou všech řešení druhé nerovnice.

Příklad : Vyřešte soustavu nerovnic : $x + 2 > 3$
$2x - 1 < x + 6$

Řešení : $x + 2 > 3 \quad \wedge \quad 2x - 1 < x + 6$
$x > 1 \quad \wedge \quad x < 7$

Tuto skutečnost můžeme zapsat jako **$1 < x < 7$** nebo **$x \in (1 ; 7)$**

Množina všech reálných čísel, které vyhovuje této podmínce je otevřený interval s krajními body 1 ; 7, které do množiny nepatří.

Příklad : Vyřešte soustavu nerovnic : $x + 1 \geq 2$
$3x - 2 \leq 2x + 3$

$x + 1 \geq 2 \quad \wedge \quad 3x - 2 \leq 2x + 3$
$x \geq 1 \quad \wedge \quad x \leq 5$

Tuto skutečnost můžeme zapsat jako **$1 \leq x \leq 5$** nebo **$x \in \langle 1 ; 5 \rangle$**

Množina všech reálných čísel, které vyhovuje této podmínce je uzavřený interval s krajními body 1 ; 5, které do množiny patří.

Příklad : Vyřešte soustavu nerovnic : $x + 2 > 3$
$2x - 1 \leq x + 6$

Řešení : $x + 2 > 3 \quad \wedge \quad 2x - 1 \leq x + 6$
$x > 1 \quad \wedge \quad x \leq 7$

Tuto skutečnost můžeme zapsat jako **$1 < x \leq 7$** nebo **$x \in (1 ; 7\rangle$**

Množina všech reálných čísel, které vyhovuje této podmínce je polouzavřený interval s krajními body 1 ; 7, přičemž 1 nepatří do intervalu a 7 patří do intervalu. V některých učebnicích se můžete setkat s výrazem zleva (zdola) otevřený a zprava (shora) uzavřený.

Příklad 10 : Vyřešte soustavu nerovnic : a) $3 - x < 5 \qquad 5x + 17 > 8x - 10$

b) $x + 1 > 2x + 1 \qquad 5x + 2 < 3x + 1$ c) $3x - 3 \leq x + 1 \qquad x - 2 < 2x + 1$

d) $3x - 1 < x - 2 \qquad x + 1 \leq 5x + 6$ e) $3x - 8 < 2.(2x - 5) \qquad 5x + 2 > 9.(1 - x)$

f) $2.(x + 4) > 3x - 4 \qquad \frac{1}{7}.(5x + 7) < \frac{1}{3}.(2x + 7)$

g) $\frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2} < 2x \qquad \frac{2x+15}{9} \geq \frac{x-1}{5}+\frac{x}{3}$

h) $2x - 3 < \frac{4x}{3} \qquad 1 + \frac{1}{3}x < \frac{3x}{4}$

Příklad : Řešte soustavu nerovnic : $-1 < \frac{2-5x}{3} \leq 2$

Tento zápis můžeme zapsat také takto :

$$-1 < \frac{2-5x}{3} \quad \wedge \quad \frac{2-5x}{3} \leq 2$$

$$-3 < 2 - 5x \quad \wedge \quad 2 - 5x \leq 6$$

$$x < 1 \quad \wedge \quad x \geq -0{,}8$$

$$\mathbf{-0{,}8 \leq x < 1} \quad \vee \quad \mathbf{x \in \langle -0{,}8\ ;\ 1)}$$

Opakujeme :

Příklad : Pro jaké x je výraz $\frac{5x}{7}$ a) kladný b) záporný c) roven nule

d) výraz nemá smysl.

a) Zlomek je kladný, jestliže čitatel i jmenovatel je buď kladný nebo oba jsou záporné. Protože jmenovatel je kladný, tak čitatel musí být také kladný. Aby součin 5x byl kladný, musí být x kladný. $x > 0$

b) Zlomek je záporný, jestliže čitatel a jmenovatel má opačné znamínko.
Protože jmenovatel je kladný, tak čitatel musí být záporný. Aby součin 5x byl záporný, musí být x záporný. $x < 0$

c) Zlomek je záporný, jestliže čitatel je roven 0. Aby součin 5x byl roven nule, musí být alespoň jeden činitel roven 0. v našem případě tedy $x = 0$.

d) Aby zlomek neměl smysl je nutné, aby jmenovatel byl roven 0. To v našem případě není možné. Neboli neexistuje žádné x, aby tento výraz neměl smysl.

Příklad: Pro jaké x je výraz $\frac{x-9}{x}$

a) kladný b) záporný c) roven nuled) výraz nemá smysl.

a) $x > 0$ a současně $x - 9 > 0 \Rightarrow x > 0$ a současně $x > 9 \Rightarrow \mathbf{x > 9}$
nebo
$x < 0$ a současně $x - 9 < 0 \Rightarrow x < 0$ a současně $x < 9 \Rightarrow \mathbf{x < 9}$

b) $x > 0$ a současně $x - 9 < 0 \Rightarrow x > 0$ a současně $x < 9 \Rightarrow \mathbf{0 < x < 9}$
nebo
$x < 0$ a současně $x - 9 > 0 \Rightarrow x < 0$ a současně $x > 9 \Rightarrow$ **neexistují žádné x dané vlastnosti**

c) $x - 9 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 9}$

d) $\mathbf{x = 0}$

Příklad 11 : Pro jaké x je výraz $\frac{5x}{x-4}$ a) kladný b) záporný c) roven nule

d) výraz nemá smysl.

Příklad 12 : Pro jaké x je výraz $\frac{x-5}{x-1}$ a) kladný b) záporný c) roven nule

d) výraz nemá smysl.

Příklad 13 : Pro jaké x je výraz $\frac{x^2}{2x+5}$ a) kladný b) záporný c) roven nule d) výraz nemá smysl.

Příklad 14 : Pro jaké x je výraz $\frac{9a^2-36}{3a^2+12a+12}$ a) kladný b) záporný c) roven nule d) výraz nemá smysl.

Příklad : V nádobě je 10 litrů vody o teplotě 20°C. Jakou teplotu musí mít 14 litrů vody, které přidáme nádoby, aby vzniklá voda měla teplotu minimálně 25°C a maximálně 60°C ?

1. fáze : zápis v podobě tabulky

	množství	teplota	
1. voda	10	20	10.20
2. voda	14	x	14.x
směs min.	24	25	24.25
směs max.	24	60	24.60

2. fáze : sestavení nerovnice a její vyřešení

$$24 \,.\, 25 < 10 \,.\, 20 + 14x < 24 \,.\, 60$$
$$600 < 200 + 14x < 1440$$
$$600 < 200 + 14x \quad \wedge \quad 200 + 14x < 1440$$
$$28\frac{4}{7} < x \quad \wedge \quad x < 88\frac{4}{7}$$
$$\mathbf{28\frac{4}{7} < x < 88\frac{4}{7}}$$

3. fáze : odpověď.

Voda, kterou budeme přilévat musí mít teplotu v rozmezí ($28\frac{4}{7}$ **;** $88\frac{4}{7}$ **).**

Příklad 15 : Kdyby traktorista zoral denně o dva hektary více, než plánoval, zoral by za 9 dní více než 84 hektarů. Kdyby zoral o 1 hektar denně méně, než plánoval, zoral by za 12 dní nejvíce 84 hektarů. Kolik hektarů má zorat podle plánu ?

4.4. Lineární nerovnice s absolutní hodnotou

Příklad : Vyřešte nerovnici $| x - 5 | < 2$

1. fáze : $x - 5 \geq 0 \Rightarrow | x - 5 | = x - 5$, což se promítne do nerovnice takto :
$x \geq 5 \quad \wedge \quad x - 5 < 2$
$x \geq 5 \quad \wedge \quad x < 7 \quad \Rightarrow$ dílčí výsledek $5 \leq x < 7$

2. fáze $x - 5 < 0 \Rightarrow | x - 5 | = - x + 5$, což se promítne do nerovnice takto :
$x < 5 \quad \wedge \quad - x + 5 < 2$
$x < 5 \quad \wedge \quad 3 < x \quad \Rightarrow$ dílčí výsledek $3 < x < 5$

3. fáze Vzhledem k tomu, že platí $x - 5 \geq 0 \vee x - 5 < 0$, tak i mezi dílčími výsledky

platí nebo $\Rightarrow$ 5 $\leq$ x < 7 $\vee$ 3 < x < 5 $\Rightarrow$ **3 < x < 7**

Příklad 16 : Řešte tyto nerovnice : a) $|x - 5| \leq 3$ b) $|2 - 3x| < 1$ c) $|3 - 2x| < 3$ d) $|3x - 4| < 2$ e) $|2x - 1{,}5| < 0{,}5$ f) $|x + 5| \geq 4$

Příklad 17 : Řešte soustavu nerovnic : a) $1 < \left|\frac{x-1}{2}\right| < 2$ b) $2 < \left|\frac{3x-2}{5}\right| < 4$

Příklad 18 : Určete všechna celá čísla, která jsou řešením nerovnic : a) $|5x - 2| < 8$ b) $|5x + 3| < 7$ c) $|5 - 3x| \leq 1$ d) $|3 - 4x| \leq 3$

Příklad : Řešte nerovnici $|x - 5| - 2.|x + 1| > |x - 3| + 1$

1. fáze : Určíme nulové body lineárních dvojčlenů v absolutních hodnotách :
x + 1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1
x – 3 = 0 $\Rightarrow$ x = 3
x – 5 = 0 $\Rightarrow$ x = 5

2. fáze : Tyto nulové body rozdělí množinu reálných čísel na čtyři disjunktní množiny. V tabulce určíme pro jednotlivé intervaly hodnoty absolutních hodnot.

	(-∞ ; -1)	< -1 ; 3)	< 3 ; 5)	< 5 ; ∞)
| x - 5 |	5 - x	5 – x	5 – x	x – 5
| x + 1 |	-x – 1	x + 1	x + 1	x + 1
| x - 3 |	3 - x	3 - x	x – 3	x – 3

3. fáze : Řešíme danou nerovnici v jednotlivých intervalech.
a) x ∈ (-∞ ; -1) ∧ (5 – x) – 2.(-x – 1) > (3 – x) + 1
x ∈ (-∞ ; -1) ∧ x > -1,5 $\Rightarrow$ dílčí výsledek x ∈ (-1,5 ; -1)
b) x ∈ < -1 ; 3) ∧ (5 – x) – 2.(x + 1) > (3 – x) + 1
x ∈ < -1 ; 3) ∧ x < -0,5 $\Rightarrow$ dílčí výsledek x ∈ < -1 ; -0,5)
c) x ∈ < 3 ; 5) ∧ (5 – x) – 2.(x + 1) > (x - 3) + 1
x ∈ < 3 ; 5) ∧ x < 1,25 $\Rightarrow$ dílčí výsledek ∅
d) x ∈ < 5 ; ∞) ∧ (x – 5) – 2.(x + 1) > (x - 3) + 1
x ∈ < 5 ; ∞) ∧ x < - 2,5 $\Rightarrow$ dílčí výsledek ∅

4. fáze : Určení závěrečného výsledku : **(-1,5 ; -0,5)**

Příklad 19 : Řešte nerovnice v oboru reálných čísel :
a) $|x + 4| \geq |x - 3|$ b) $|x + 1| - |2x + 3| < 0$ c) $3.|x - 7| + 2 \leq x - 2 + 2.|x - 5|$ d) $5 - |2x - 1| + \frac{x+2}{3} > 2.|x + 1|$
e) $2.(x - 4) + |x + 3| \leq |x - 5| - x$ f) $|x| + |5 - x| < 8$

4.5. Lineární nerovnice se dvěma neznámými.

Příklad : Rozhodněte, zda-li uspořádané dvojice [-5 ; 1] [-1 ; -5] jsou řešením nerovnice
$5x + 10y > -24$
Uspořádané dvojice dosadíme do nerovnosti :

$5.(-5) + 10.1 > -24$	$5.(-1) + 10.(-5) > -24$
$-15 > -24$	$-55 > -24$
pravdivé tvrzení	nepravdivé tvrzení
dvojice je řešením dané nerovnice	dvojice není řešením dané nerovnice

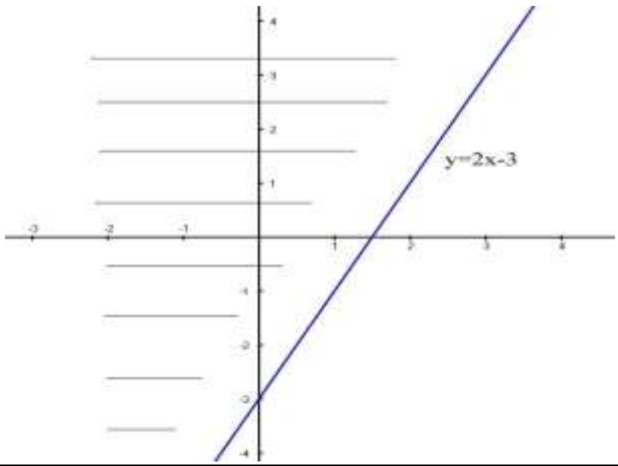
Příklad 20 : Rozhodněte, které z uspořádaných dvojic [1 ; -2] , [2 ; -1] , [3 ; 0] , [4 ; 4] , [0 ; 3] jsou řešením nerovnice $3x - 4y + 12 > 0$.

Lineární nerovnici se dvěma neznámými řešíme graficky.

Grafem každé nerovnice se dvěma neznámými, která také neobsahuje rovnost, je polorovina bez hraniční přímky.

Grafem každé nerovnice se dvěma neznámými, která obsahuje také rovnost, je polorovina s hraniční přímkou.

Příklad : Graficky vyřešte nerovnici $-2x + y + 3 > 0$
1. etapa : vyjádříme y $\qquad y > 2x - 3$
2. etapa : narýsujeme graf $\qquad y = 2x - 3$
3. etapa : do nerovnice dosadíme souřadnice libovolného bodu, např. [0 ; 0] .
Dostaneme-li pravdivou nerovnost, pak grafem je polorovina, která obsahuje souřadnice onoho bodu.
Dostaneme-li nepravdivou nerovnost, pak grafem je polorovina, která neobsahuje souřadnice onoho bodu. $\qquad 0 > 2.0 - 3$
Jedná se o pravdivou nerovnost a proto grafem nerovnice $y > 2x - 3$ je polorovina, která obsahuje bod [0 ; 0] - na obrázku je vyšrafována. Protože se jedná o ostrou nerovnost, do výsledku nepatří hraniční polopřímka.



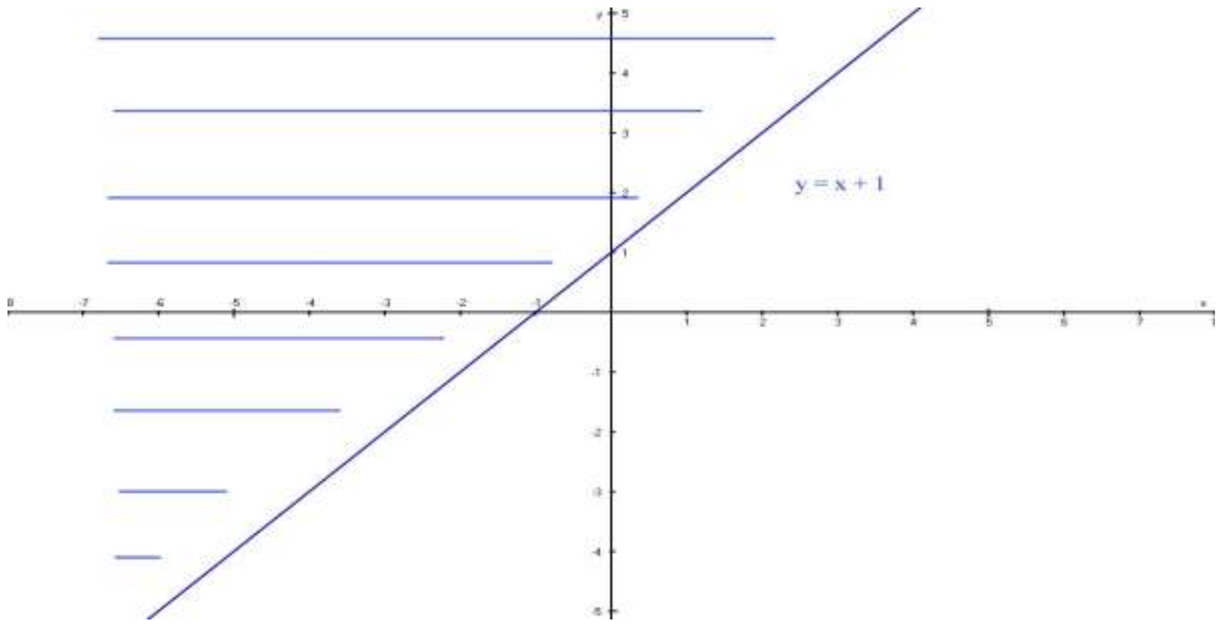
Příklad 21 : Graficky vyřešte nerovnice : a) $2x + 3y - 1 > 0$ b) $5x + y + 4 \leq 0$
c) $5x - 2y + 3 \leq 0$ d) $x - y < -2$ e) $2x + y \leq -4$

4.6. Grafické řešení soustavy dvou lineárních nerovnic

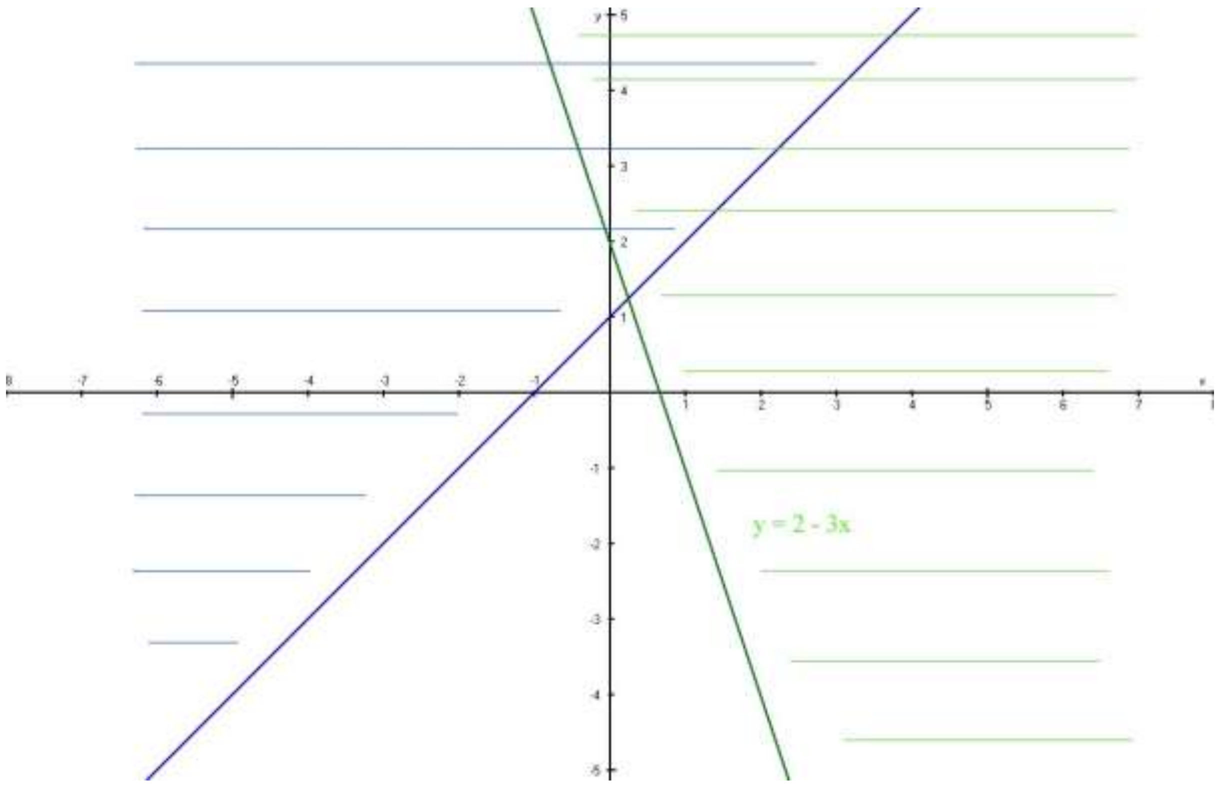
Graficky řešíme soustavu dvou nerovnic se dvěma neznámými tak, že postupně graficky znázorníme řešení obou nerovnic. Řešením soustavy nerovnic je průnik množin, které jsou řešením jednotlivých nerovností.

Příklad : Graficky vyřešte soustavu nerovnic $x + 1 < y \quad 3x + y > 2$

1.fáze : graficky vyřešíme první nerovnici



2. fáze : graficky vyřešíme druhou nerovnici



3. fáze : řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení první a druhé nerovnice.

Příklad 22 : Graficky vyřešte soustavy nerovnic : a) $2x + y \leq 4 \quad y \geq x$
b) $2x + y \leq 6 \quad x + 2y \geq 6$

Příklad 23 : Graficky vyřešte soustavy nerovnic : a) $y - 3x - 6 \leq 0 \quad 2y - 6x + 3 \geq 0$
b) $x + y \leq 2 \qquad y - x \leq 2 \qquad y \geq 0$

Souhrnná cvičení

1) Řešte nerovnice v oboru přirozených čísel :

a) $\frac{27x+2}{6} < 2{,}5 + \frac{12x+1}{3}$

b) $3.(x + 2) > \frac{2-x}{2}$

c) $\frac{2x-3}{4} - \frac{1-2x}{5} < -\frac{x-7}{2}$

d) $\frac{3x+5}{3} > 2x+5-\frac{x-1}{2}$

2) Řešte nerovnice v oboru reálných čísel :

a) $(x + 3).(x - 7) > (x - 3)^2$

b) $(x - 5).(x + 5) > (x - 1).(x + 3)$

c) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$

d) $(x - 1).(x + 3) \leq (x + 1)^2$

3) Řešte nerovnici $\frac{x-7}{2x+3} + 1 > 0$ v intervalu $-5 \leq x < 4$.

4) Řešte soustavu nerovnic :

a) $3.(x + 5) > 5x + 3 \qquad 2x - 5 < 0{,}75x$

b) $2.(4 - x) > 5.(4 - x) + \frac{5x}{3} \qquad 0{,}5.(7 - x) - 3 < 0{,}2.(3 + 4x) - 4$

c) $\frac{5.\ x-1}{6} - 1 > \frac{2.\ x+1}{3} \qquad 2 + \frac{2}{3}.\ x+1 < 3 - 0{,}25.(x - 1)$

d) $\frac{5-4x}{3} + \frac{1}{2} < x - 0{,}25.(2x + 1) \qquad \frac{x+2}{5} > \frac{5x}{7} + x$

e) $0{,}7x - \frac{x-0{,}1}{2} > \frac{2x+5}{10} - 3 \geq 0{,}3x + 0{,}5$

5) Vyřešte v množině přirozených čísel :

a) $\frac{2x+3}{x} - 1 > 0$

b) $\frac{x-6}{x} + 2 < 0$

6) Vyřešte soustavu nerovnic $5.(x - 3) \geq 0{,}5.(x - 6)$ $\quad \frac{x+3}{7-3x} < 0$

a) v intervalu $(-1 ; 1)$ b) v intervalu $(2 ; 5)$ c) v intervalu $(1 ; \infty)$

7) Určete pro jaké x nabývá výraz $\frac{2x-3}{7-3x}$ a) kladné hodnoty, b) záporné hodnoty, c) nulu.

8) Určete pro jaké x nabývá výraz $\frac{2x-1}{3+2x}$ a) kladné hodnoty, b) záporné hodnoty, c) nulu.

9) Řešte nerovnice :

a) $|x - 4| \leq 3$ b) $|x| \geq -1$ c) $|x| < 1$ d) $|x| < 4$ e) $|x| < -3$

10) Určete všechna celá čísla, která jsou řešením soustavy nerovnic :

a) $3x + \frac{2x-13}{11} > 2$ $\quad \frac{x}{6} - \frac{3x-20}{9} < -\frac{2}{3}.\ x-7$

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \geq \frac{x-2}{3} - x$ $\quad 1 - x \geq 0{,}5x - 4$

11) Určete největší záporné číslo, které je řešením soustavy nerovnic :

$\frac{x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \geq x + 5$ $\quad \frac{x+2}{8} < -\frac{x-2}{7}$

12) Řešte nerovnice : a) $\frac{x+3\ .\ x-7}{x-2} > 0$ b) $\frac{x+1\ .\ x-4}{x+5} < 0$

13) Vyřešte nerovnici $x^2 \geq x^4$

14) Řešte nerovnici $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} > 0$

15) Řešte nerovnici :

a) $|3x - 2| < |x + 1| + 5$

b) $2.|x| - \frac{2x-1}{3} \leq 3.|x + 2|$

c) $|x - 2| + |x + 2| > 3x - 5$

d) $|x - 3| + |12 - x| \geq x$

e) $|5 - 2x| > |2x - 5|$

f) $|x - 1|\ .\ |x + 7| > 0$

16) Graficky vyřešte nerovnice :

a) $2x > 3y + 1$

b) $2y - 5x \leq -2$

c) $3x + 2y + 4 > 0$

d) $2x - 3y \leq 0$

e) $|x + 2| - y + 3 < 0$

17) Graficky řešte soustavu nerovnic :
a) $2x + y - 5 \geq 0 \quad x + 2y + 4 \geq 0$ b) $3x + 2y - 1 \geq 0 \quad 5x - y + 3 < 0$

Výsledky :

1 a) $x \in \ 1;2;3$, **b)** množina všech při přirozených čísel, **c)** nemá řešení, **d)** množina všech při přirozených čísel, **e)** nemá řešení, **f)** $x \in \ 1$, **g)** $x \in \ 1;2$, **h)** nemá řešení, **ch)** nemá řešení, **i)** $x \in \ 7;8;9;......;+\infty$,

2 a), $x \in \ -\infty;.....-2;-1;0;1;2;3$, **b)** $x \in \ -7,-6;-5;...0;1;2....+\infty$, **c)** nemá řešení,
d) všechna celá čísla, **e)** $x \in \ 1;2.....;\infty$ **,** **f)** $x \in \ -\infty;.....;-6;-5;$ **,**
g) $x \in \ -\infty;......;-2;-1;0;1$, **h)** $x \in \ -\infty;.........;-1;0;1;2$, **ch)** $x \in \ -\infty;....-7;-6$ **,**
i) $x \in \ -\infty;.....-2;-1$, **j)** $x \in \ 7;8;9;10;.....\infty$ **,**

3 a) $x < 0$, **b)** $-8 < x < 0$, **c)** nemá řešení, **d)** nemá řešení, **e)** $x \leq -4\frac{2}{3}$, **f)** $x < 0$, **g)** $x < 0$,
h) $x < -5\frac{3}{4}$, **ch)** $x \leq -\frac{6}{11}$ **i)** nemá řešení,

4 a) $x < 3\frac{5}{28}$, **b)** $x > -8$, **c)** nemá řešení, **d)** $x > 0{,}5$, **e)** $x \leq -4\frac{2}{3}$, **f)** $x \leq 1\frac{7}{8}$, **g)** $x \leq 2{,}4$,
h) $x < -5{,}75$, **ch)** $x \leq -\frac{6}{11}$, **i)** $x > 6$,

5) $0 < 1$,
6) ano pro $b < 0$,

7 a) $x > -2{,}5$, **b)** $x > 0{,}75$, **c)** $x < -0{,}2$, **d)** $4 \leq x < 10$, **e)** $-\frac{3}{7} \leq x \leq \frac{3}{5}$, **f)** $-1\frac{3}{11} < y$,
g) $x < 2\frac{1}{3}$, **h)** $x < -1$, **ch)** $x < 0$, **i)** nekonečně mnoho řešení, **j)** $x \leq -0{,}5$,

8) $3{,}5 < x \leq 7$,

9) $-3 < x < \frac{2}{3} \ \vee \ 7 < x \leq 9$,

10 a) $-2 < x < 9$, **b)** $x < -0{,}5$, **c)** $-3 < x \leq 2$, **d)** $-1{,}25 \leq x \leq -0{,}5$, **e)** $x > 2$, **f)** $x < 12$,
g) $2{,}7 < x < 6$, **h)** $2{,}4 < x < 4{,}5$,
11 a) $x < 0$ nebo $x > 4$, **b)** $0 < x < 4$, **c)** $x = 0$, **d)** $x = 4$,
12 a) $x < 1$ nebo $x > 5$, **b)** $1 < x < 5$, **c)** $x = 5$, **d)** $x = 1$,
13 a) $x > -2{,}5 \quad x \neq 0$, **b)** $x < -2{,}5$, **c)** $x = 0$, **d)** $x = -2{,}5$,
14 a) $a < -2$ nebo $a > 2$, **b)** $-2 < a < 2$, **c)** $a = 2$, **d)** $a = -2$,

15) Výkon za jeden den si zvolíme za neznámou. $9.(x+2) \geq 84 > 12.(x-1) \Rightarrow 7\frac{1}{3} < x \leq 8$,

16 a) $2 \leq x \leq 8$, **b)** $\frac{1}{3} < x < 1$, **c)** $0 < x < 3$, **d)** $\frac{2}{3} < x < 2$, **e)** $0{,}5 \leq x \leq 1$,
f) $x \leq -9$ nebo $x \geq -1$,

17 a) $-3 < x \ -1$ nebo $3 < x < 5$, **b)** $-6 < x < -2\frac{2}{3}$ nebo $4 < x < 7\frac{1}{3}$,

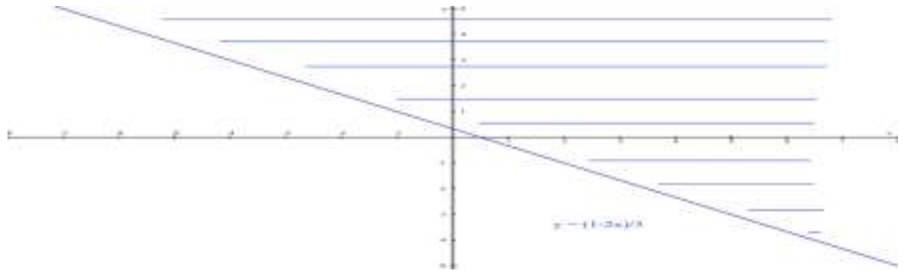
18 a) $-1;0;1$, **b)** $-1;0$, **c)** 2 , **d)** $0;1$,

19 a) $-0{,}5 \leq x \leq 3$, **b)** $x < -2$ nebo $x > -1\frac{1}{3}$, **c)** $x \geq 5\frac{5}{6}$, **d)** $-1\frac{7}{13} < x < 1\frac{3}{11}$ **e)** $x \leq 2$,

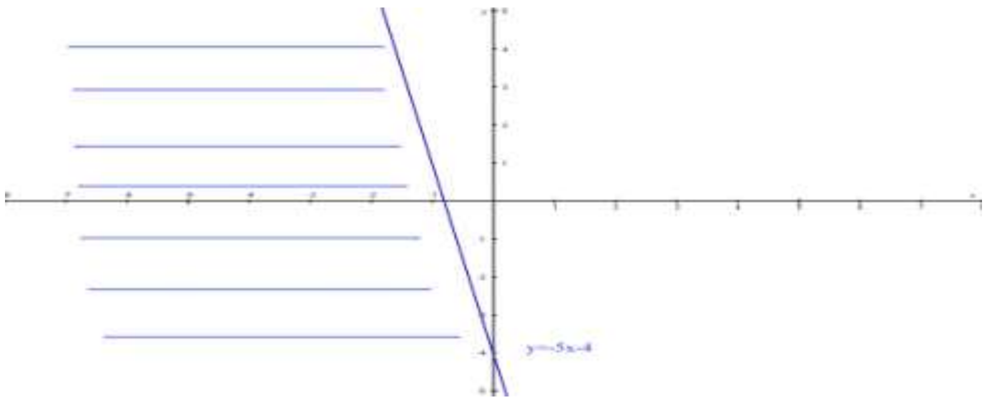
f) $-1{,}5 < x < 6{,}5$,

20) dvojice [1 ; -2] , [2 ; -1] , [3 ; 0] , [4 ; 4],

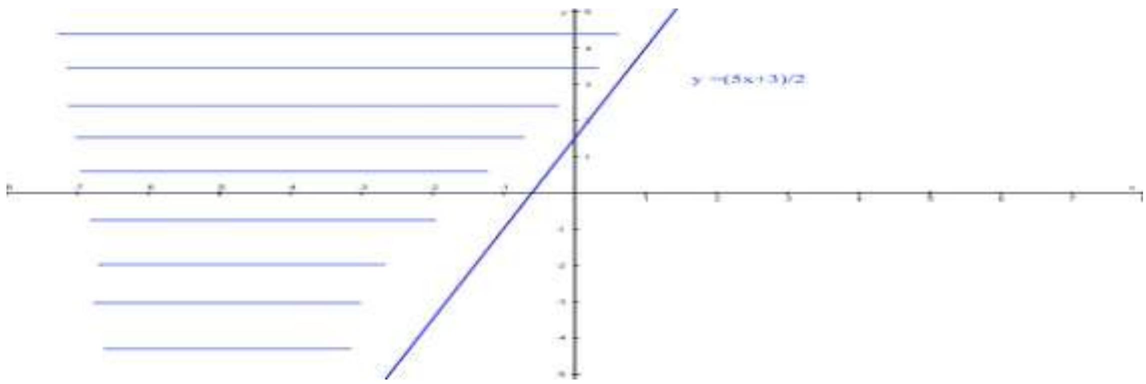
21 a)



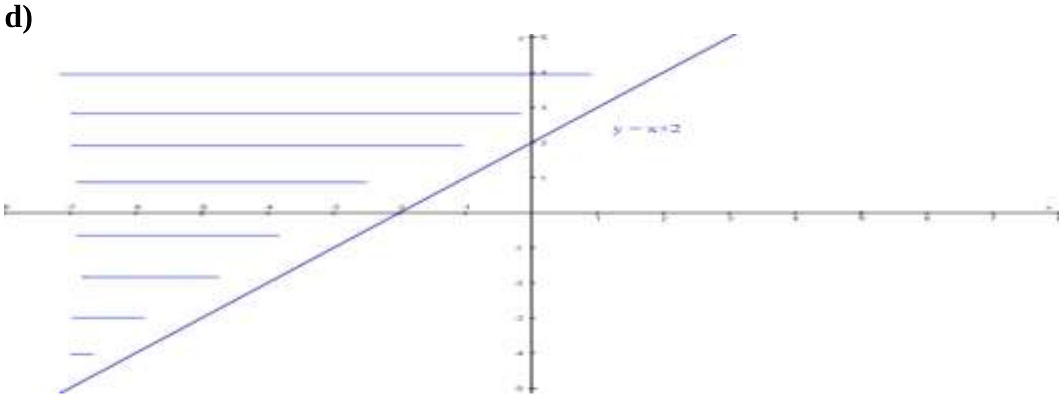
b)



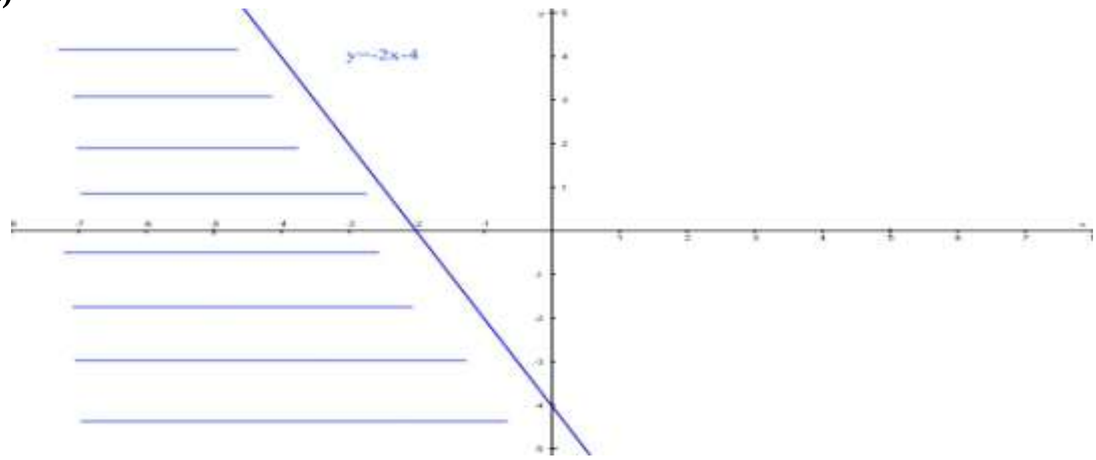
c)



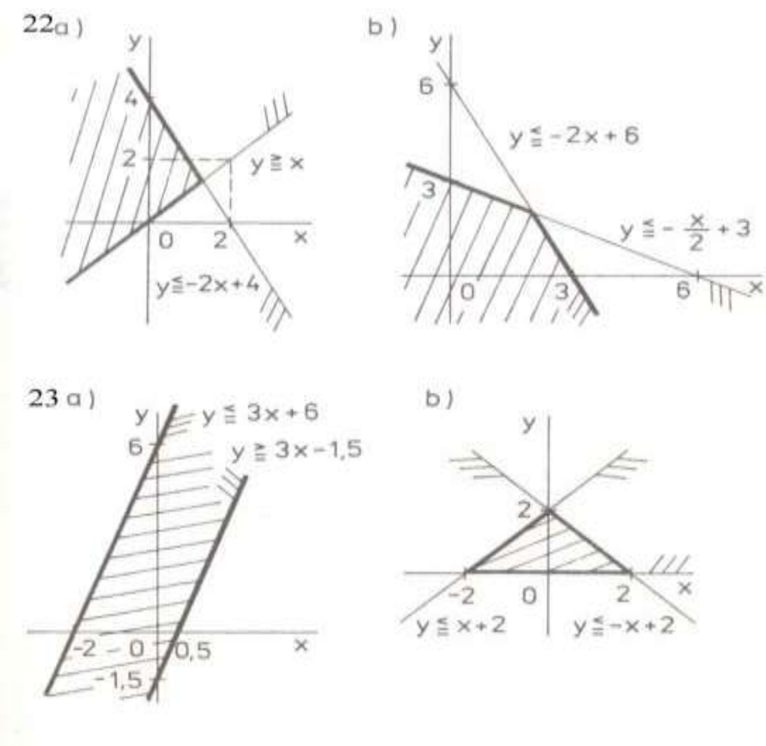
d)



e)



22 – 23)



Poznámka : výsledek 22 b je špatně.

Souhrnná cvičení

1 a) { 1; 2; 3; 4} , **b)** všechna přirozená čísla, **c)** { 1; 2; 3; } , **d)** žádné přirozené číslo,

2 a) $x > 15$, **b)** $x < -11$, **c)** $x \leq 0$, **d)** všechna reálná čísla ,

3) $(-5 \leq x < -1{,}5) \cup (1\frac{1}{3} < x < 4)$

4 a) $x < 4$, **b)** $x > 9$, **c)** nemá řešení, **d)** nemá řešení , **e)** $x \leq -30$,

5 a) všechna přirozená čísla, **b)** 1,

6 a) nemá řešení, **b)** $2\frac{2}{3} \leq x < 5$, **c)** $x \geq 2\frac{2}{3}$,

7 a) $1,5 < x < 2\frac{1}{3}$, **b)** $x < 1,5$ nebo $x > 2\frac{2}{3}$ **, c)** $x = 1,5$,

8 a) $x < -1,5$ nebo $x > 0,5$, **b)** $-1,5 < x < 0,5$, **c)** $x = 0,5$,

9 a) $1 \leq x \leq 7$, **b)** všechna reálná čísla, **c)** $-1 < x < 1$, **d)** $-4 < x < 4$, **e)** nemá řešení,

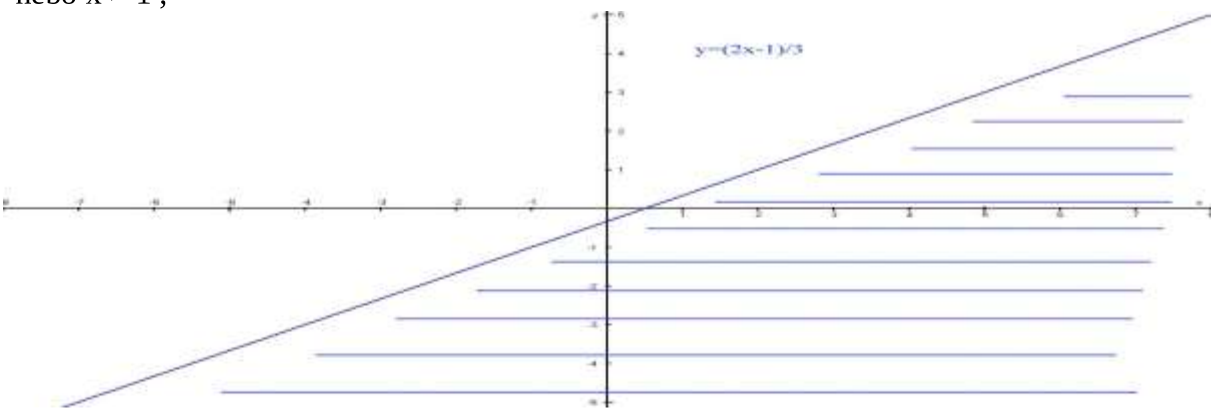
10 a) { 2; 3; 4} , **b)** { -1; 0; 1; 2; 3; } ,

11) -8 ,**12 a)** $-3 < x < 2$ nebo $x > 7$, **b)** $x < -5$ nebo $-1 < x < 4$,**13)** $-1 \leq x \leq 1$,

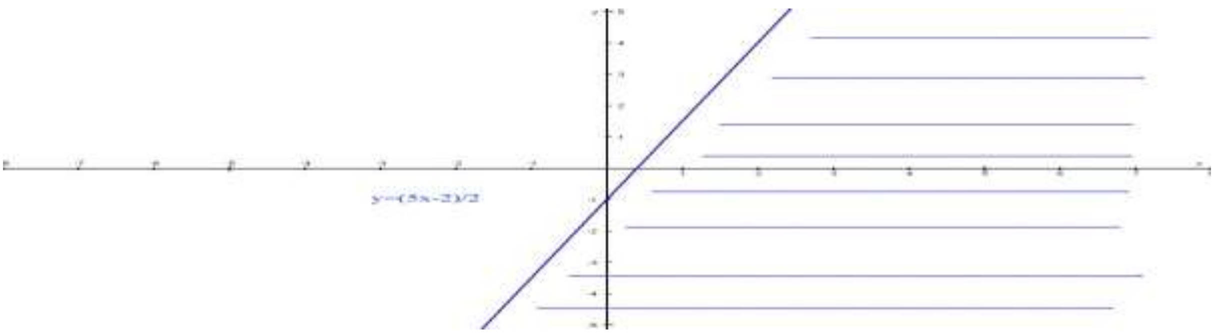
14) $x < -3$ nebo $x > -2$,

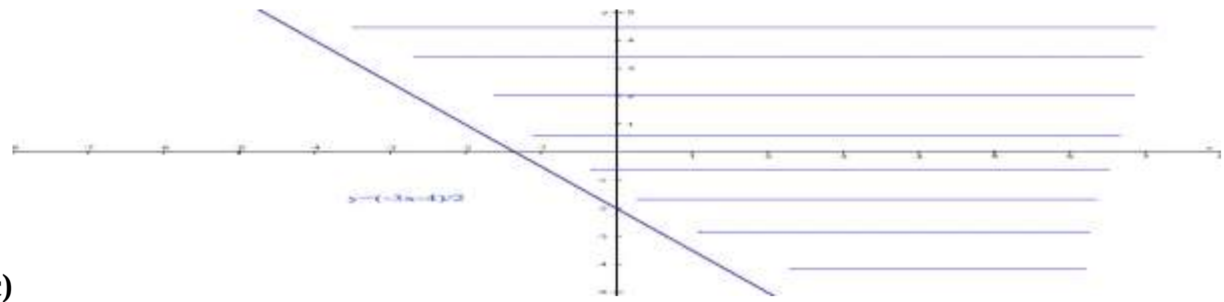
15 a) $-1 < x < 4$, **b)** $x < -19$ nebo $x \geq -1$, **c)** $x < 5$, **d)** $x \leq 9$ nebo $x \geq 15$, **e)** nemá řešení, **f)** $x < -7$ nebo $x > 1$,

16 a)



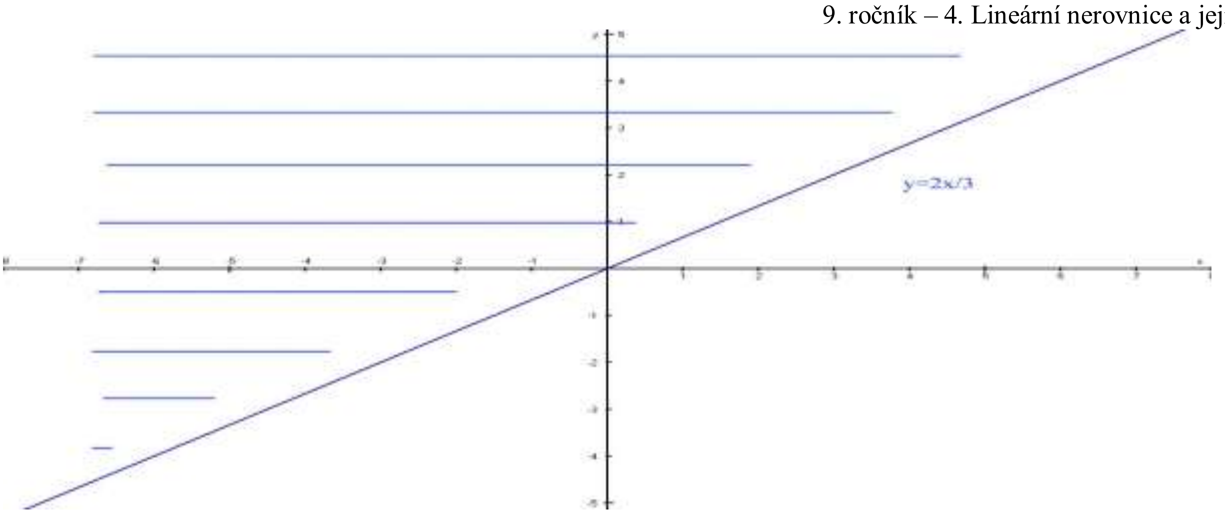
b)





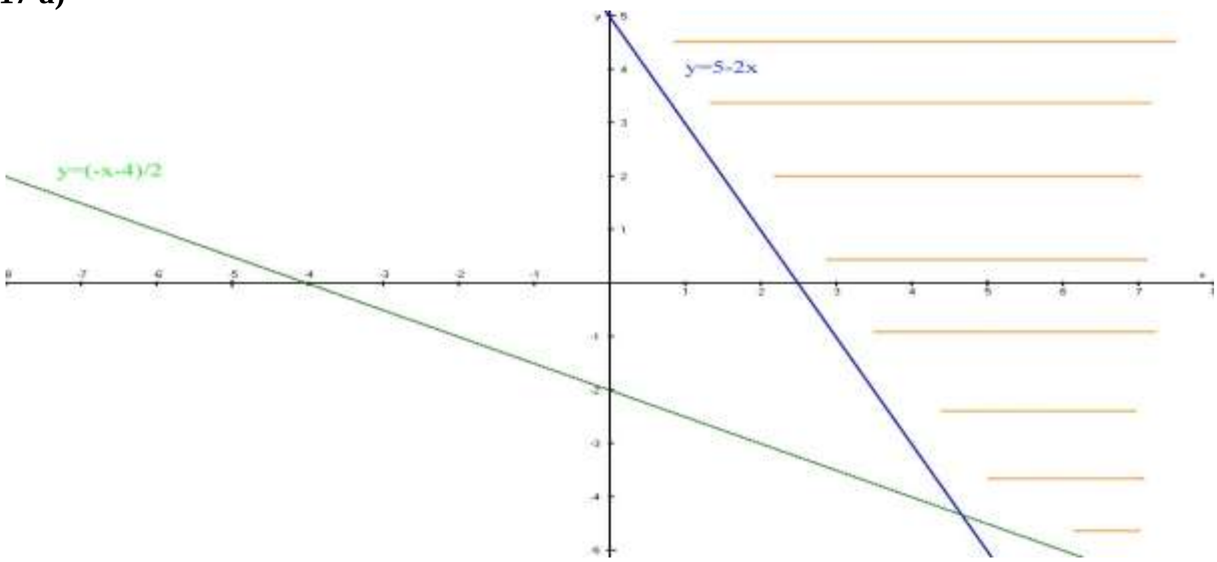
c)

d)

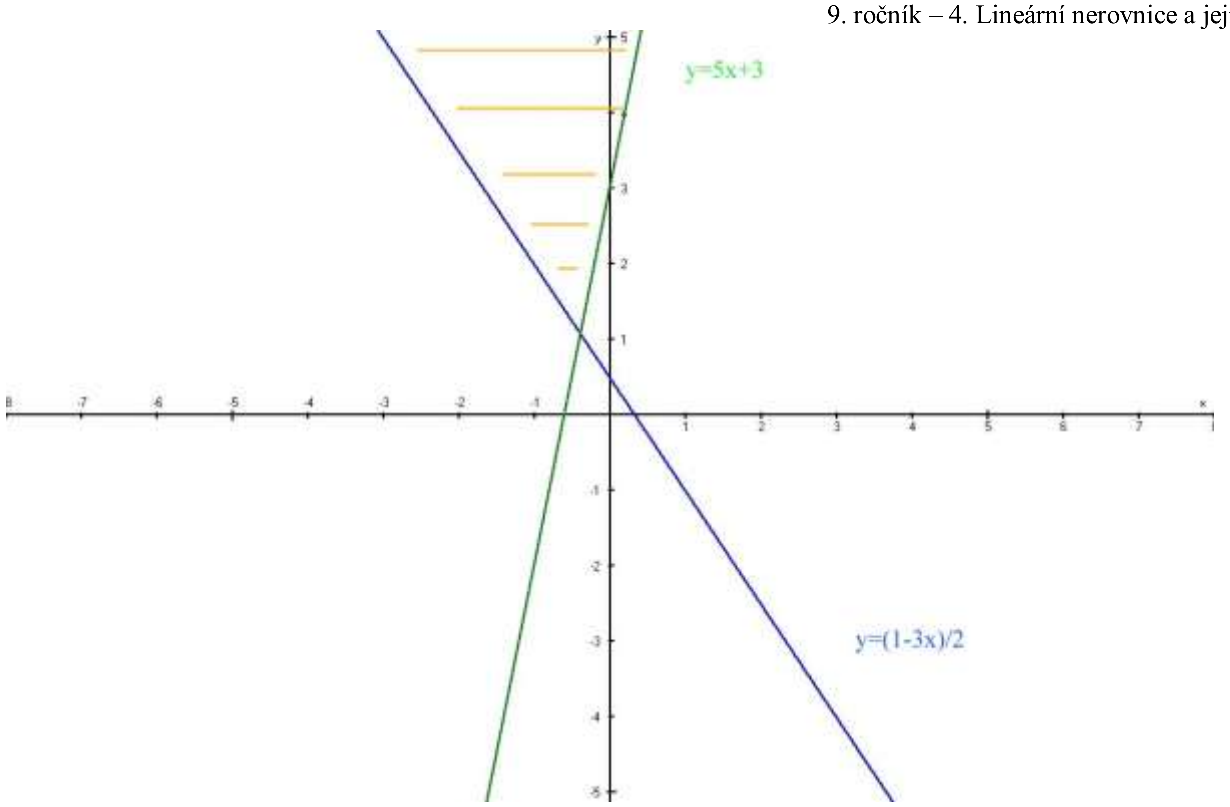


e) pro x < -2   y > -x + 1   pro x ≥ 2   y > x + 5

17 a)



17 b)


y=5x+3
y=(1-3x)/2