5. Funkce

ZOPAKUJTE SI : 8. ROČNÍK – KAPITOLA 4. Funkce.

5.1. Kvadratická funkce

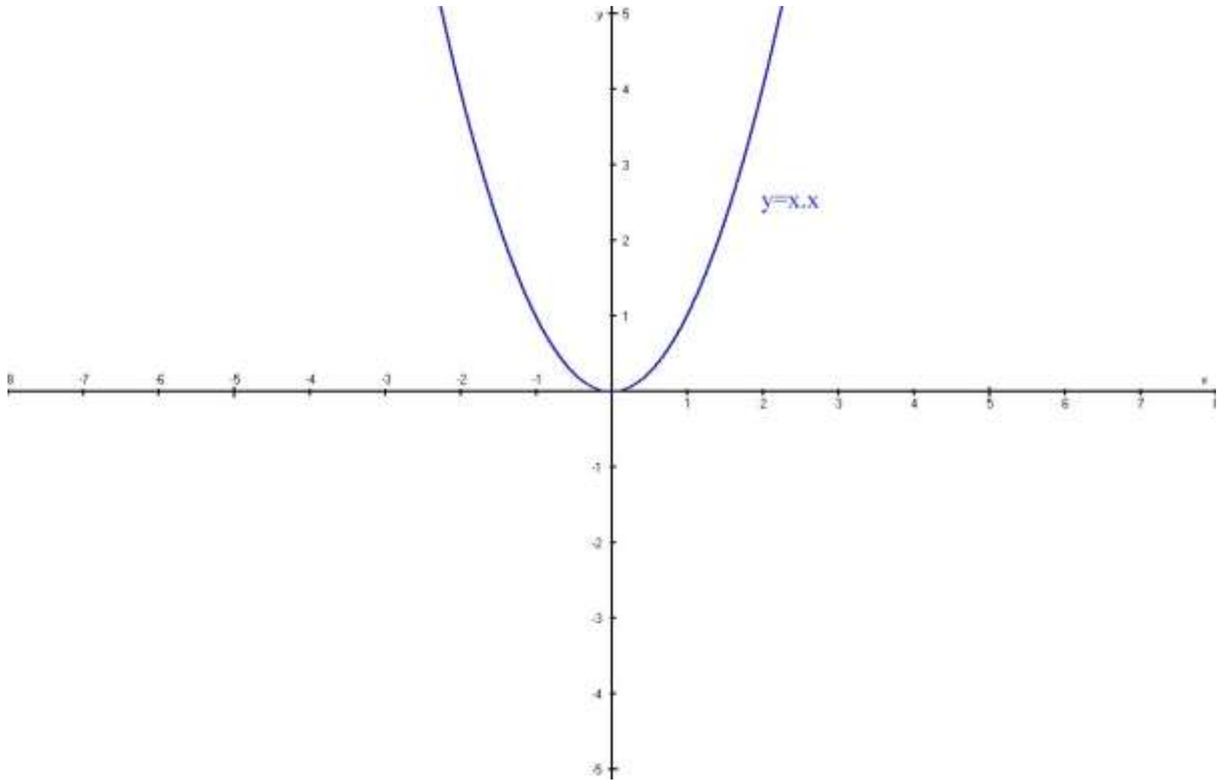
Obecná rovnice kvadratické funkce : $y = ax^2 + bx + c$
Pokud není uvedeno jinak, tak definičním oborem řešených funkcí je množina reálných čísel.

Zvláštní případy kvadratické funkce :

Je-li $b = 0$ a $c = 0$ $\Rightarrow$ $y = ax^2$ Grafem této funkce je parabola.

Je-li $a = 1$

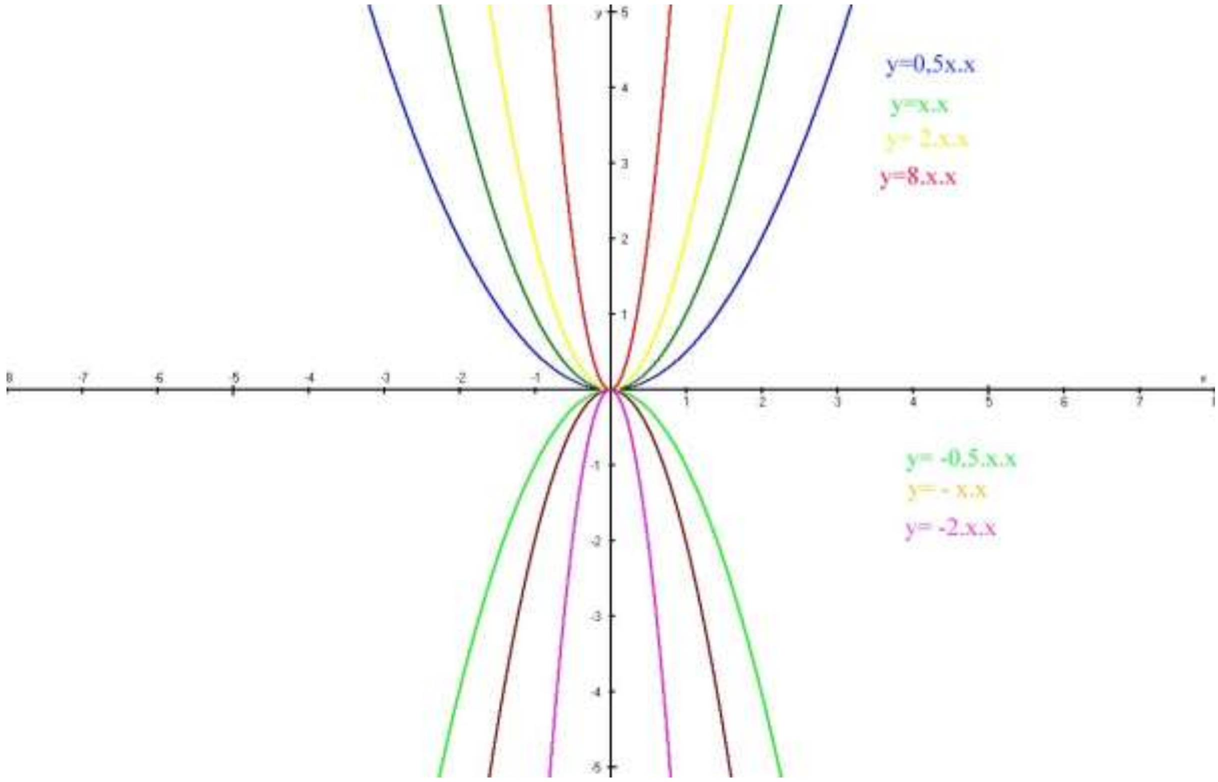
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16



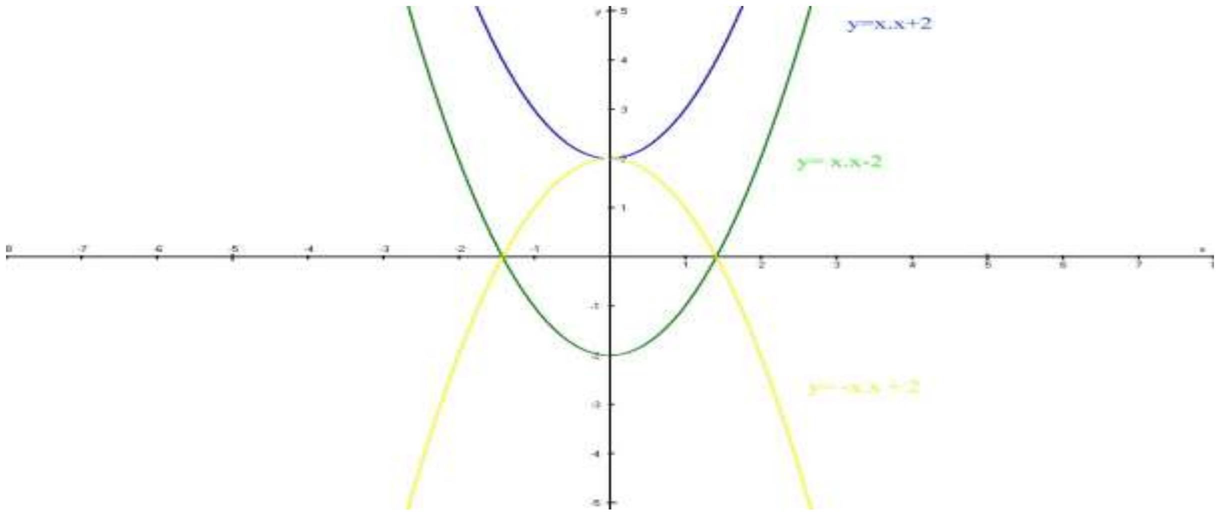
Funkce $y = ax^2$ $a \neq 0$ v intervalu $x < 0$ je klesající,
v intervalu $x > 0$ je rostoucí.

Graf kvadratické funkce tvaru $y = ax^2$ $a \neq 0$ je parabola, která má vrchol v bodě [0 ; 0].

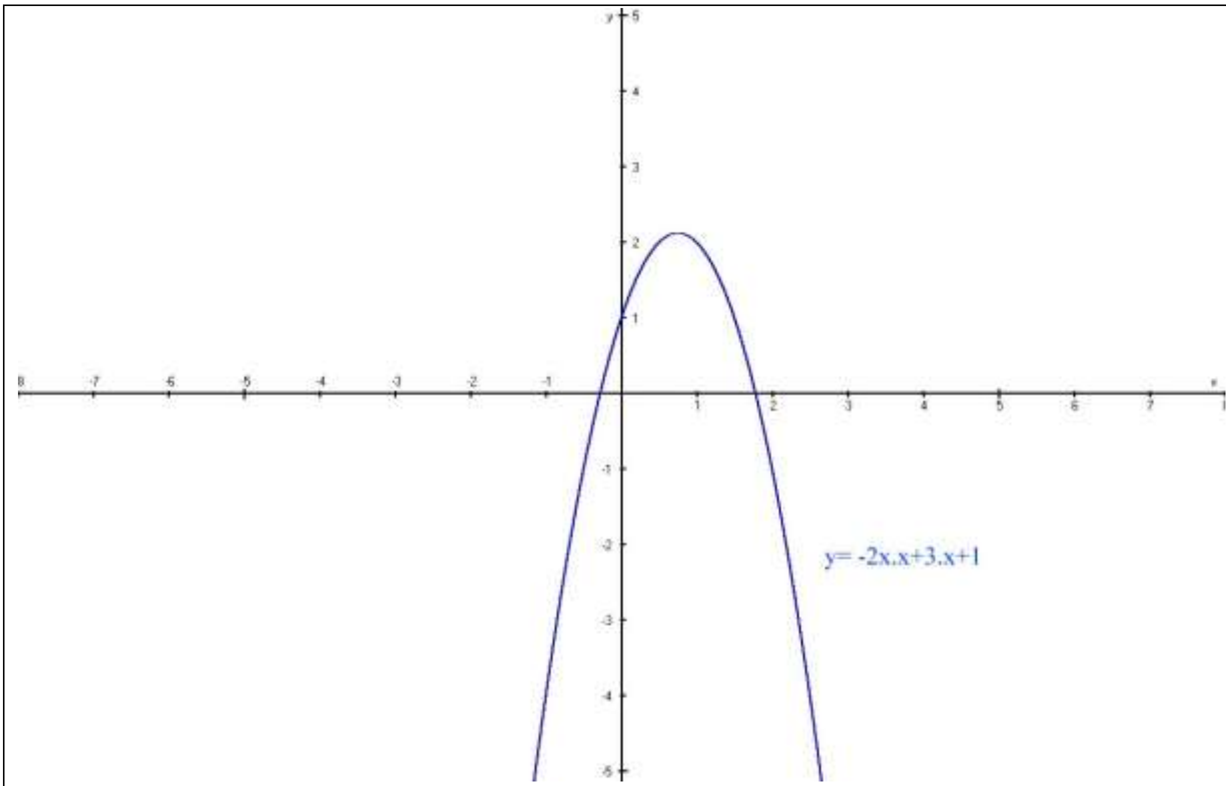
pro různé a



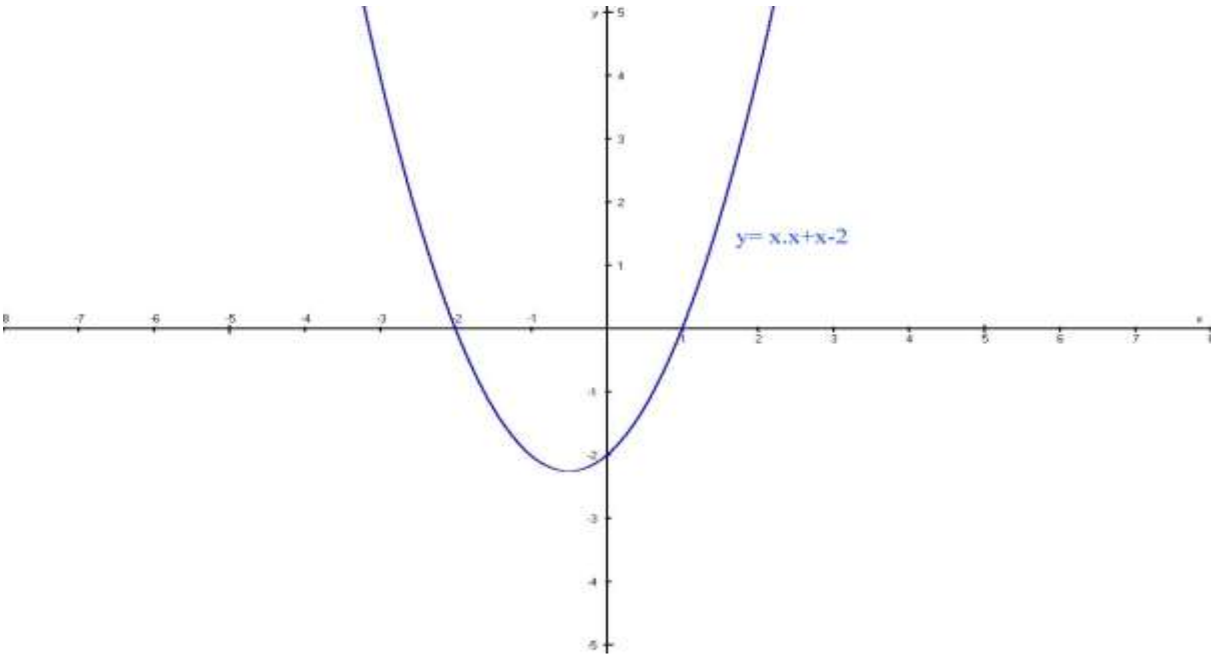
<u>Je-li b = 0</u> $\Rightarrow$ $y = ax^2 + c \quad a \neq 0$



Příklad : Narýsujte v oboru reálných čísel graf funkce : a) $y = -2x^2 + 3x + 1$ b) $y = x^2 + x - 2$ a)



b)

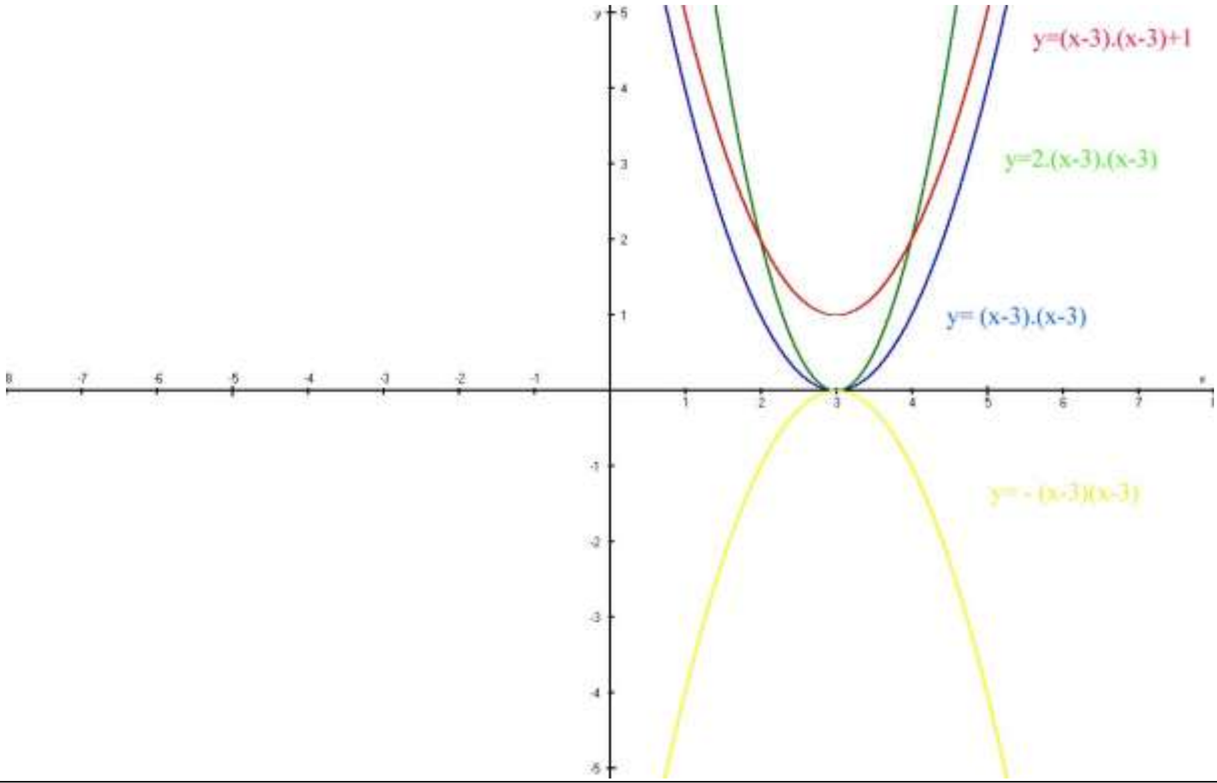


Příklad : Sestrojte funkci : a) $y = (x - 3)^2$

b) $y = -(x - 3)^2$

c) $y = 2.(x - 3)^2$

d) $y = (x - 3)^2 + 1$



POZNÁMKA : z technických důvodů nelze v grafickém programu psát mocniny a proto uvádíme mocninu jako součin výrazů.

Příklad : U funkce $y = x^2 - x - 6$ vypočítejte :
a) průsečíky grafu s osou x,
b) průsečíky grafu s osu y,
c) souřadnice vrcholu paraboly,

1. fáze : určíme průsečíky grafu s osou x
$y = x^2 - x - 6 = (x + 2) . (x - 3)$
$y = (x + 2) . (x - 3) = 0$
pro $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$ je funkční hodnota rovna nule (graf funkce protíná osu x).
Průsečíkem grafu funkce $y = x^2 - x - 6$ s osou x jsou body A ≡ [-2 ; 0] a B ≡ [3 ; 0]

2. fáze : určíme průsečíky grafu s osu y

Body ležící na ose y mají x-ovou souřadnici rovnou nule.
$y = 0^2 - 0 - 6 = - 6$
Průsečíkem grafu funkce $y = x^2 - x - 6$ s osou y je bod C ≡ [0 ; -6]
3. fáze : určíme souřadnice vrcholu paraboly
Parabola je souměrná podle své osy a proto určíme průsečík této osy s osou x
$x_2 - x_1 = 3 - (-2) = 5$ $0,5.(x_2 - x_1) = 5 . 0,5 = 2,5$
$x_0 = x_1 + 0,5.(x_2 - x_1) = -2 + 2,5 = 0,5$

Nyní určíme funkční hodnoty pro x_0 $y = x^2 - x - 6 = 0,5^2 - 0,5 - 6 = -6,25$
Vrcholem paraboly, která je grafem funkce $y = x^2 - x - 6$, je bod V ≡ [0,5 ; -6,25] .

Příklad 1 : Narýsujte graf funkce :

a) $y = 4x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ e) $y = 6x^2 + x$ g) $y = x^2 + x + 1$
b) $y = -3x^2$ d) $y = -2x^2 - 3$ f) $y = x^2 + 2x - 1$ h) $y = x^2 + 3x + 16$

Příklad 2 : Napište rovnici kvadratické funkce, jejíž body :
a) budou mít y-ove souřadnice pouze kladná čísla,
b) budou mít y-ové souřadnice pouze záporná čísla,
c) A ≡ [1 ; 1] a B ≡ [2 ; 4] budou jedinými body dané funkce.

Příklad 3 : Vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x u funkcí :

a) $y = 2x^2$ c) $y = x^2 - 1$ e) $y = x^2 + x - 72$ g) $y = -(x + 1)^2 + 1$
b) $y = x^2 + 1$ d) $y = x^2 - 2x - 8$ f) $y = (x + 1)^2$ h) $y = x^2 - 6x + 10$

Příklad 4 : Vypočtěte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou y u funkcí :

a) $y = 2x^2$ c) $y = x^2 - 1$ e) $y = x^2 + x - 72$ g) $y = -(x + 1)^2 + 1$
b) $y = x^2 + 1$ d) $y = x^2 - 2x - 8$ f) $y = (x + 1)^2$ h) $y = x^2 - 6x + 10$

Příklad 5 : Vypočtěte vrchol paraboly, která je grafem těchto funkcí :

a) $y = 2x^2$ c) $y = x^2 - 1$ e) $y = x^2 + x - 72$ g) $y = -(x + 1)^2 + 1$
b) $y = x^2 + 1$ d) $y = x^2 - 2x - 8$ f) $y = (x + 1)^2$

Příklad 6 : Vypočtěte pomocí grafu kvadratické funkce tento příklad : Určete přirozené číslo, pro které platí, že jeho součin s číslem o jedno větší je 72.

5.2. Numerické řešení kvadratické rovnice

Obecný tvar kvadratické rovnice : $ax^2 + bx + c = 0$, kde a a b je libovolné reálné číslo a současně $a \neq 0$.

Každá kvadratická rovnice má dva kořeny

Zvláštní případy kvadratické rovnice :

Je-li b = 0 $\Rightarrow$ $ax^2 + c = 0$, kvadratická rovnice bez lineárního členu

Příklad : Řešte kvadratické rovnice : a) $12x^2 - 3 = 0$
b) $12x^2 + 3 = 0$

a)
$$12x^2 - 3 = 0$$
$$12x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \mathbf{x_1 = \frac{1}{2}} \qquad \mathbf{x_2 = -\frac{1}{2}}$$

Zkouška : $L = 12 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 3 = 14 \cdot 0{,}25 - 3 = 0$ P = 0 L = P

$P = 12 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 3 = 14. 0{,}25 - 3 = 0 \qquad P = 0 \qquad L = P$

b) $12x^2 + 3 = 0$

$12x^2 = -3$

$x^2 = -\frac{1}{4}$

Tato rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, protože druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.

Obecný tvar kořene tohoto typu kvadratické rovnice :

pro c < 0 je $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ a $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$, pro c > 0 rovnice nemá řešení.

<u>Je-li c = 0</u> $\Rightarrow ax^2 + bx = 0$ kvadratická rovnice bez absolutního členu

Příklad : Řešte kvadratické rovnice : a) $5x^2 + 4x = 0$
b) $5x^2 - 4x = 0$

a) $5x^2 + 4x = 0$

$x.(5x + 4) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$

$5x + 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = -\frac{4}{5}}$

Zkouška : $L = 5 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \qquad P = 0 \qquad L = P$

$L = 5 \cdot (-\frac{4}{5})^2 + 4 \cdot (-\frac{4}{5}) = \frac{16}{5} - \frac{16}{5} = 0 \qquad P = 0 \quad L = P$

b) $5x^2 - 4x = 0$

$x.(5x - 4) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$

$5x - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = \frac{4}{5}}$

Zkouška : $L = 5 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \qquad P = 0 \qquad L = P$

$L = 5 \cdot (\frac{4}{5})^2 - 4 \cdot (\frac{4}{5}) = \frac{16}{5} - \frac{16}{5} = 0 \quad P = 0 \quad L = P$

Obecný tvar kořene tohoto typu kvadratické rovnice je $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{b}{a}$.

<u>Je-li b = 0 a c = 0</u> $\Rightarrow ax^2 = 0$

Příklad : Řešte kvadratickou rovnici $9x^2 = 0$.

$9x^2 = 0.$

$x^2 = 0$

$x_1 = 0$ dvojnásobný kořen

Zkouška : $L = 9 \cdot 0 = 0 \qquad P = 0 \qquad L = P$

Příklad : Řešte kvadratickou rovnici $x^2 + 7x + 12 = 0$

Tento typ rovnic již umíme vyřešit pomocí zkráceného rozkladu na součin.

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 3).(x + 4) = 0$

$x_1 = -3$ $x_2 = -4$

Zkouška : $L = (-3)^2 + 7.(-3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$ $P = 0$ $L = P$

$L = (-4)^2 + 7.(-4) + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$ $P = 0$ $L = P$

Kořen kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má tvar : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$\sqrt{b^2-4ac}$ **se nazývá diskriminant.**

$b^2 - 4ac > 0$ - rovnice má mě řešení

$b^2 - 4ac = 0$ - rovnice má jedno řešení (dvojnásobné)

$b^2 - 4ac < 0$ - rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel (má řešení v oboru komplexních čísel

Příklad : Řešte kvadratickou rovnici a) $2x^2 - 7x - 15 = 0$,

b) $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

a) $2x^2 - 7x - 15 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.\ -15}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{49+120}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x_2 = \frac{7-\sqrt{49+120}}{4} = \frac{7-13}{4} = -1\frac{1}{2}$$

Zkouška $L = 2.5^2 - 7.5 - 15 = 50 - 35 - 15 = 0$ $P = 0$ $L = P$

$L = 2.(-1,5)^2 - 7.(-1,5) - 15 = 4,5 + 10,5 - 15 = 0$ $P = 0$ $L = P$

b) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-1)}}{2.2}$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$$

Zkouška : $L = 2.\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 3.\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} - 1 = 2.\dfrac{9-6.\sqrt{17}+17}{16} + \dfrac{-9+3.\sqrt{17}}{4} - 1 =$

$= \dfrac{13-3.\sqrt{17}}{4} + \dfrac{-9+3.\sqrt{17}}{4} - 1 = \dfrac{4}{4} - 1 = 0$ $P = 0$ $L = P$

$L = 2.\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 3.\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$ $P = 0$ $L = P$

Příklad 7 : Řešte kvadratickou rovnici :

a) $5x^2 + 4x + 8 = 0$
b) $x^2 - 3x - 4 = 0$
c) $x^2 - 0{,}25 = 0$
d) $5x^2 - 4x = 0$
e) $-x^2 + x - 6 = 0$
f) $x^2 + 6x + 5 = 0$
g) $x^2 - 16x - 80 = 0$
h) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$
ch) $\frac{2x-1}{2} + \frac{2}{2x-1} = 2$
i) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-3}{x-2} = 2\frac{1}{6}$
j) $x^2 = 16$
k) $x^2 = -9$
l) $x^2 = x$
m) $x^2 - 4x - 12 = 0$
n) $x^2 + 2x - 3 = 0$
o) $x^2 - 7x - 10 = 0$
p) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
r) $5x^2 - 24x - 5 = 0$
s) $2x^2 - 9x + 10 = 0$
t) $(x + 6).(x - 1) = (2x - 3) . (x - 1)$
u) $(x + 4)^2 + (x - 10)^2 = (x + 8)^2$
v) $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x.\ x+2} = \frac{1}{x.\ x-2}$
w) $\frac{8}{3x-2} - \frac{15x-7}{9x^2-4} + \frac{1}{x} = \frac{13x+4}{3x^2-2x}$

Příklad 8 : Řešte kvadratické rovnice :

a) $(x - 8)^2 + (x - 6)^2 = 100$
b) $x^2 + (5 - x)^2 = (5 - 2x)^2$
c) $(2x + 3) . (3x - 2) +(2x - 3) . (3x - 2) = 0$
d) $(x - 2)^2 + (x - 9)^2 = (x - 11)^2$
e) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2) . (5x + 2) = 114$
f) $(2x - 7)^2 - (3x + 2)^2 = 125$
g) $(2x - 1) : (x + 1) = (x + 3) : (2x - 3)$
h) $\frac{x+5}{x+1} + \frac{x-5}{x-1} = 1$
ch) $\frac{2x+2}{3x-7} = \frac{3x-2}{2x+7}$
i) $x . x = 4.x$
j) $x + x = x$

Příklad : Kořeny kvadratické rovnice jsou čísla 4 a -2. Vypočtěte kvadratickou rovnici s těmito kořeny.

1. fáze: dosadíme do vzorce $(x - x_1) . (x - x_2) = 0$, kde x_1 a x_2 jsou kořeny naší rovnice
$(x - 4) . (x + 2) = 0$

2. fáze : rovnici upravíme
$$\mathbf{x^2 - 2x - 8 = 0}$$

Příklad 9 : V rovnici $x^2 - 2x + a = 0$ vypočtěte a tak, aby rovnice měla jeden z kořenů číslici 0 .

Příklad 10 : Určete číslo a tak, aby rovnice $25x^2 + (16a + 8).x + (4a^2 + 4a - 8) = 0$ byla kvadratickou rovnicí bez lineárního členu a potom tuto rovnici vyřešte.

Příklad 11 : Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníku se rovná 75 % druhé odvěsny. Určete obvod tohoto trojúhelníka, je-li jeho plošný obsah 24 cm^2 .

Příklad 12 : Vypočtěte poloměr kružnice, jejíž tětiva, vzdálená 8 cm od středu, je o 13 cm delší než poloměr.

Příklad 13 : Obsah obdélníka je 91 cm^2. Určete jeho rozměry, je-li jeho šířka o 6 cm kratší než jeho délka.

Příklad 14 : Určete přirozené číslo, pro které platí, že jeho součin s číslem o jednu větším je 72.

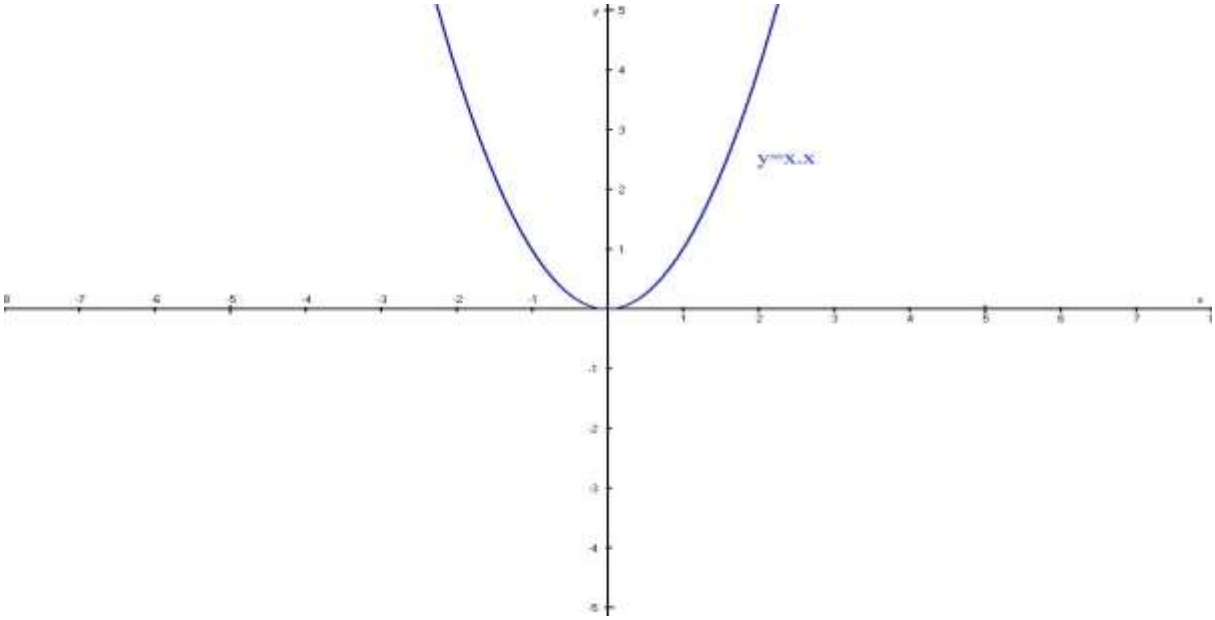
Příklad 15 : Určete přirozené číslo, pro které platí, že jeho druhá mocnina zmenšená o 6 je rovna 283.

5.3. Grafické řešení kvadratické rovnice

Příklad : Vyřešte graficky kvadratickou rovnici : a) $x^2 = 0$

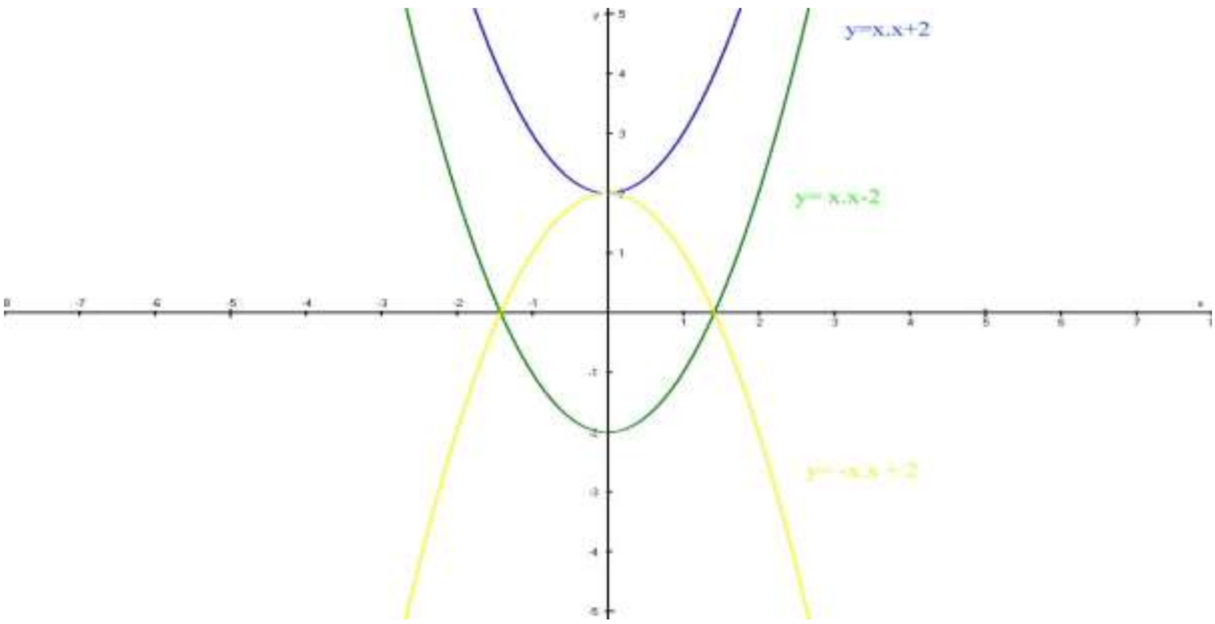
b) $x^2 - 2 = 0$ c) $-x^2 + 2 = 0$

d) $x^2 + 2 = 0$ e) $x^2 + x - 2 = 0$



Z grafu vidíme, že funkční hodnota f(x) = y = 0 nastane pro x = 0. $\Rightarrow$

Rovnice $x^2 = 0$, je-li $\mathbf{x = 0}$



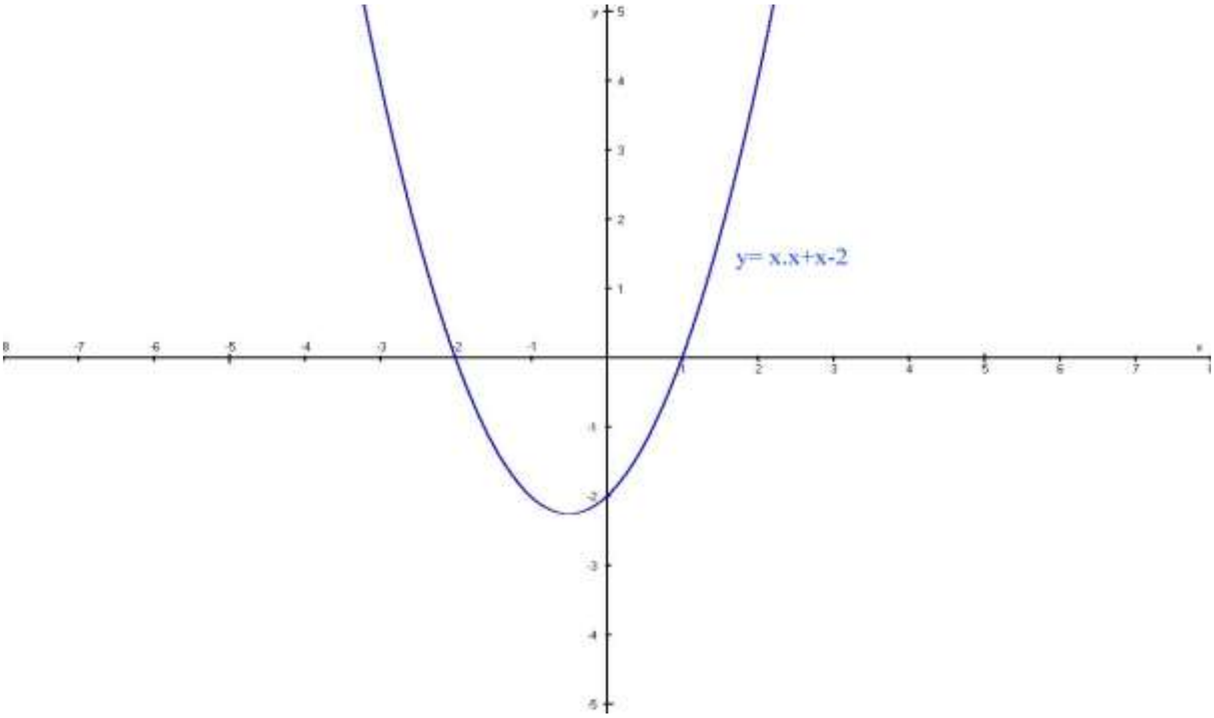
Z grafu vidíme, že funkční hodnota f(x) = y = 0 nastane pro $x^2 - 2 = 0$. $\Rightarrow$

Rovnice $x^2 - 2 = 0$, je-li $\mathbf{x_1 = \sqrt{2}}$ **a** $\mathbf{x_2 = -\sqrt{2}}$ **.**

Z grafu vidíme, že funkční hodnota f(x) = y = 0 nastane pro $-x^2 + 2 = 0$. $\Rightarrow$

Rovnice $-x^2 + 2 = 0$ je-li $\mathbf{x_1 = \sqrt{2}}$ **a** $\mathbf{x_2 = -\sqrt{2}}$ **.**

Z grafu vidíme, že funkční hodnota f(x) = y = 0 pro $x^2 + 2 = 0$ nenastane. $\Rightarrow$
Rovnice $x^2 + 2 = 0$ nemá řešení.



Z grafu vidíme, že funkční hodnota f(x) = y = 0 nastane pro $x^2 + x - 2 = 0$. $\Rightarrow$
Rovnice $x^2 + x - 2 = 0$, je-li **$x_1 = -2$ a $x_2 = 1$.**

Shrnutí : Grafickou metodou jsme potvrdili, že kvadratická rovnice :

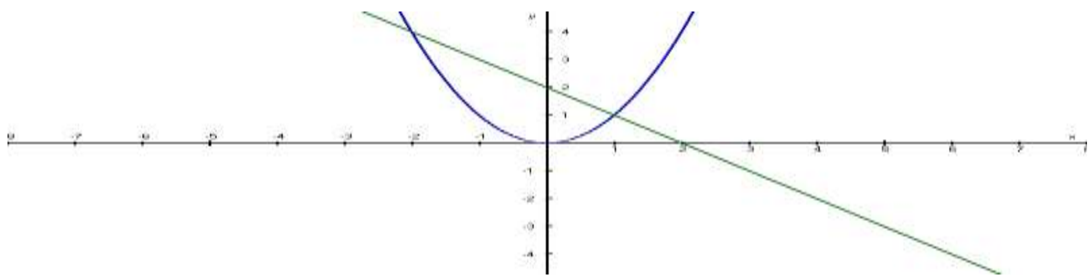
a) má dva kořeny,
b) má jeden kořen (dvojnásobný),
c) nemá řešení.

Rovnici $x^2 + x – 2 = 0$ můžeme graficky řešit také takto :

$x^2 + x – 2 = 0$

$x^2 = - x +2$

$f(x) = x^2$ $g(x) = 2 – x$ a zjišťujeme pro které x je f(x) = g(x)



f(x) = g(x) $\Rightarrow$ $x_1 = -2$ $x_2 = 1$ Logicky jsme dostali stejné výsledky.

Příklad 16 : Graficky vyřešte tyto rovnice :

a) $-4x^2 = 0$
b) $0,8x^2 - 1 = 0$
c) $x^2 +2x -5 = 0$
d) $x^2 -10x +20 = 0$
e) $x^2 +2x = 0$
f) $x^2 -3x - 4 = 0$
g) $(x + 2)^2 –2x + 1 = 0$
h) $5x^2 + 4 = 0$

5.4. Numerické a grafické řešení kvadratické nerovnice

Příklad : Vyřešte kvadratickou nerovnici $x^2 + 2x - 8 < 0$

1. fáze : kvadratickou nerovnici rozložíme na součin (zkráceným rozkladem nebo pomocí diskriminantu – nerovnici řešíme jako rovnici)

$x^2 + 2x - 8 < 0$ nebo $x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4) . (x - 2) < 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.\ -8}}{2.1}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

$(x - x_1) . (x - x_2) = 0$

$(x + 4) . (x - 2) = 0$

$(x + 4) . (x - 2) < 0$

2. fáze : vyřešíme danou nerovnici

$(x + 4) . (x - 2) < 0$

$x + 4 < 0 \wedge x - 2 > 0 \quad \vee \quad x + 4 > 0 \wedge x - 2 < 0$

$x < -4 \wedge x > 2 \quad \vee \quad x > -4 \wedge x < 2$

$\emptyset \qquad -4 < x < 2$

$\mathbf{-4 < x < 2}$

Příklad : Vyřešte kvadratickou nerovnici $x^2 + x - 2 \le 0$: a) numericky
b) graficky

a) numericky :
1. fáze : kvadratickou nerovnici rozložíme na součin (zkráceným rozkladem nebo pomocí diskriminantu – nerovnici řešíme jako rovnici)

$x^2 + x - 2 \le 0$

$(x - 1) . (x + 2) \le 0$

2. fáze : vyřešíme danou nerovnici

$(x + 2) . (x - 1) \le 0$

$x + 2 \ge 0 \wedge x - 1 \le 0 \quad \vee \quad x + 2 \le 0 \wedge x - 1 \ge 0$

$x \ge -2 \wedge x \le 1 \quad \vee \quad x \le -2 \wedge x \ge 1$

$-2 \le x \le 1 \qquad \emptyset$

$\mathbf{-2 \le x \le 1}$

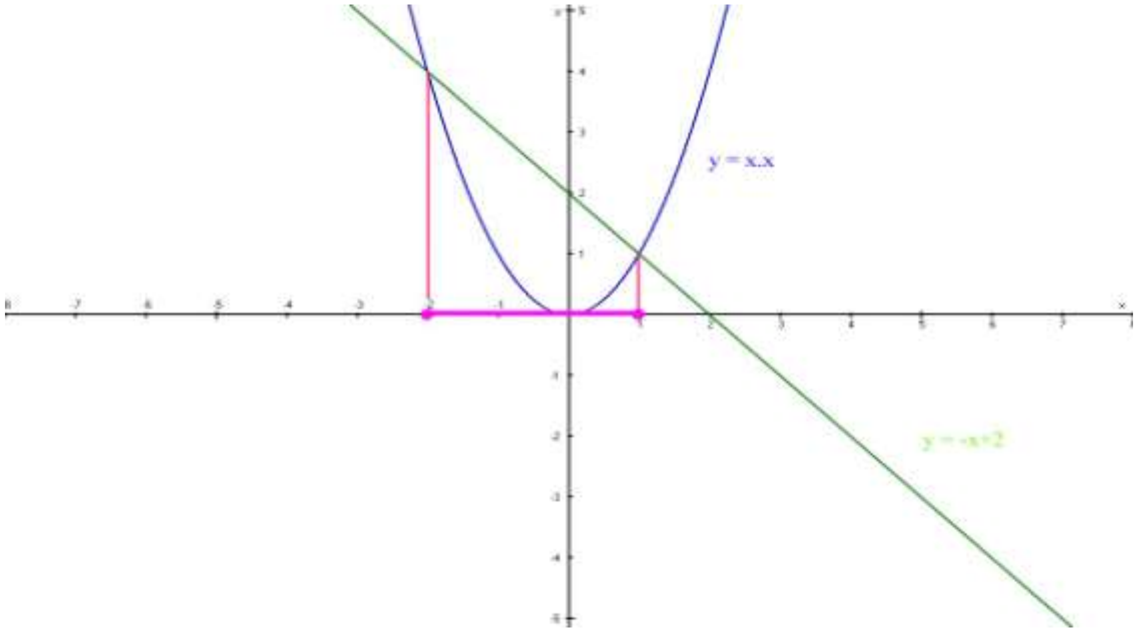
3. fáze : kvadratickou nerovnici upravíme na vhodný tvar a rozdělíme na dvě funkce

$x^2 + x - 2 < 0$

$x^2 < 2 - x$

$f(x) < g(x)$, kde $f(x) = x^2$ $g(x) = -x + 2$

b) graficky
4. fáze : dané dvě funkce znázorníme



$f(x) < g(y)$, kde $f(x) = x^2$ $g(x) = -x + 2$ je v intervalu $\mathbf{-2 \leq x \leq 1}$

Numerickou a grafickou metodou jsme řešili kvadratickou nerovnici a dostali jsme shodný výsledek $-2 \leq x \leq 1$.

Příklad 17 : Řešte numericky i graficky kvadratické nerovnice :

a) $x^2 -4x + 4 \leq 0$ b) $x^2 -2x + 9 > 0$ c) $-x^2 + x - 3 > 0$
d) $-x^2 + 25 \leq 0$ e) $x^2 - 49 < 0$ f) $x^2 - x - 6 < 0$
g) $x^2 - 6x - 7 < 0$ h) $x^2 + 6x - 55 \geq 0$ ch) $x^2 + 12x + 35 > 0$
i) $x^2 - 22x + 40 \geq 0$ j) $x^2 -7x - 30 > 0$ k) $3x^2 - 10x + 8 \leq 0$
l) $(x - 3) . (x + 1) + 8x < (3 - x) . (x + 1)$

5.5. Racionální lomená funkce $y = \frac{k}{ax+b}$

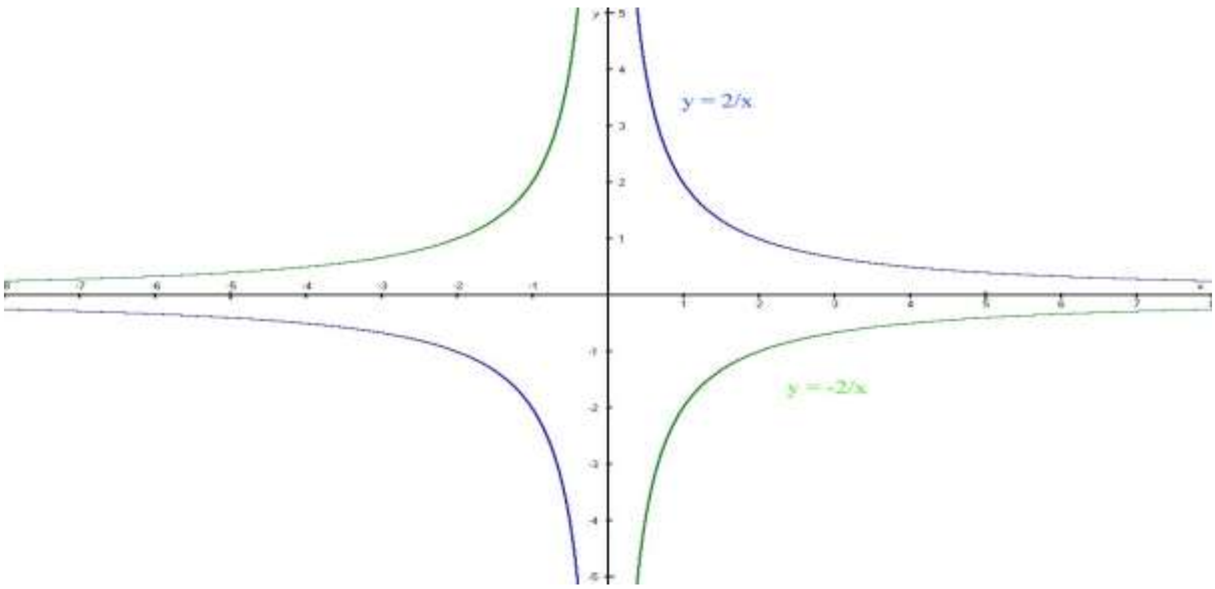
5.5.1 Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost je zvláštní případ racionální lomené funkce, pro kterou platí a = 1, b = 0, $x \neq 0$

Rovnice nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, kde k je libovolné reálné číslo, které je různé od nuly $x \neq 0$.

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola, jejíž osou je : a) pro $k > 0$ přímka $y = x$
b) pro $k < 0$ přímka $y = -x$

Příklad : Sestrojte graf nepřímé úměrnosti : a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = -\frac{2}{x}$



Pro k > 0 platí, že funkce v definičním oboru pro x < 0 je funkcí klesající
pro x > 0 je funkcí klesající.
Pro k < 0 platí, že funkce v definičním oboru pro x < 0 je funkcí rostoucí
pro x > 0 je funkcí rostoucí.

Příklad : Ve válcové nádobě o objemu 1 000 cm^3 je uzavřen plyn pístem, kterým lze posouvat. Při posunutí pístu se mění objem uzavřeného plynu, a tím se zároveň mění i tlak. Nemění-li se teplota plynu platí vzorec p.V = k, kde k je fyzikální konstanta, která v našem případě má hodnotu 100. Narýsujte graf této závislosti.

1. fáze : zápis

$p = \frac{100}{V}$

nezávisle proměnná veličina ……….. objem
závisle proměnná veličina ………….. tlak
definiční obor ……………………….. V ≤ 1 000

2. fáze : sestrojení příslušného grafu

Příklad 18 : Sestrojte graf funkce : a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

Příklad 19 : Sestrojte graf nepřímé úměrnosti, který prochází bodem A ≡ [2 ; 1,5].

Příklad 20 : Vypočtěte konstantu k , jestliže víte, že graf funkce $y = \frac{k}{x}$ prochází bodem o souřadnicích [2 ; 3]. Sestrojte graf této nepřímé úměrnosti.

Příklad 21 : Zjistěte výpočtem i graficky, který z bodů A ≡ [1 ; -1], B ≡ [-1 ; -1,5], C ≡ [-5 ; $-\frac{1}{3}$] leží na grafu funkce $y = \frac{1,5}{x}$

5.5.2. Racionální lomená funkce $y = \frac{k}{ax+b}$.

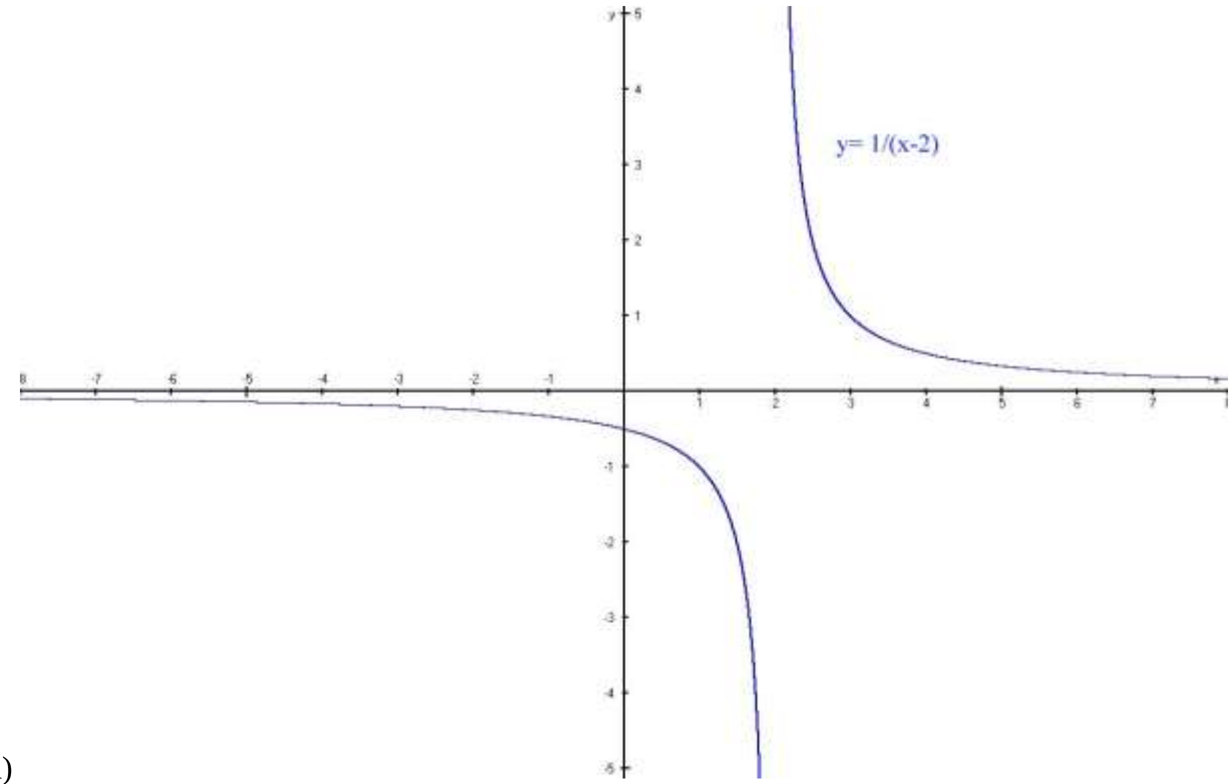
Racionální lomená funkce $y = \frac{k}{ax+b}$ a – reálné číslo, b – reálné číslo

Podmínka řešitelnosti : $-\frac{b}{a} \neq 0$ $\Rightarrow$

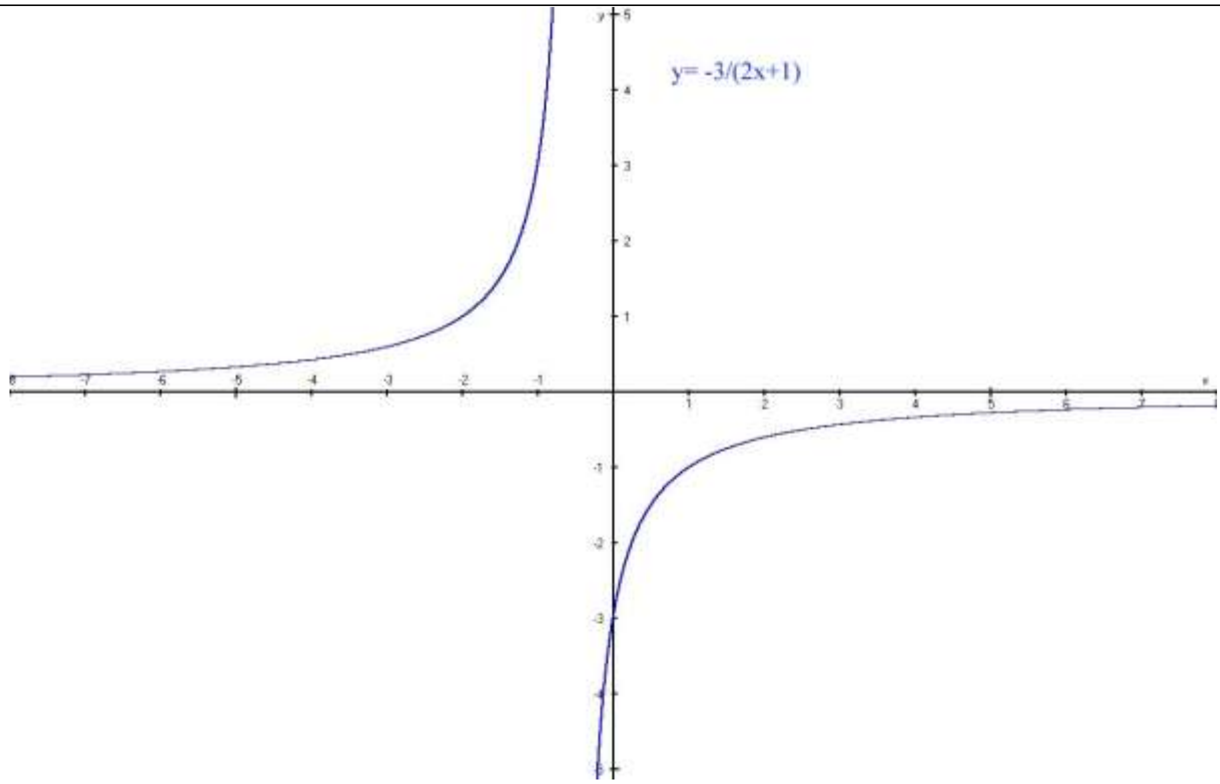
Definiční obor racionální lomené funkce : všechna reálná kromě čísla $-\frac{b}{a}$.

Zápis **D** = **R** - { $-\frac{b}{a}$ }

Příklad : Narýsujte graf funkce : a) y = $\frac{1}{x-2}$ b) y = $\frac{-3}{2x+1}$



a)
definiční obor : všechna reálná čísla kromě čísla 2



b)
definiční obor : všechna reálná čísla kromě čísla -0,5.

Příklad 22 : Narýsujte graf funkce : a) y = $\frac{2}{x-5}$ b) y = $\frac{-3}{x+1}$ c) y = $\frac{-2}{3x+2}$

Příklad 23 : Sestrojte graf závislosti odporu R měděného drátu dlouhého 1 metr na průřezu (v intervalu 1 mm^2 až 10 mm^2) při specifickém odporu ρ = 0,0175 ohmu na metr (R = $\rho.\frac{l}{S}$, kde S – je průřez).

Příklad 24 : Napište : a) rovnici funkce y = $\frac{k}{3x-2}$, jejíž graf prochází bodem A ≡ [$\frac{1}{3}$; -1].

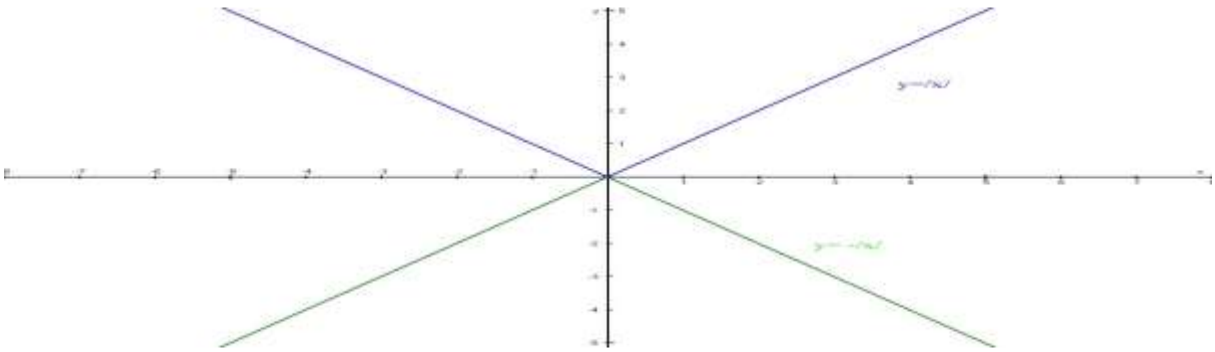
b)) rovnici funkce y = $\frac{k}{x+1}$, jejíž graf prochází bodem B ≡ [$\frac{1}{4}$; -$\frac{4}{5}$].

Příklad 25 : Napište rovnici funkce y = $\frac{3}{ax+b}$, jejíž graf prochází bodem A ≡ [1 ; 1] a B ≡ [-1 ; -3].

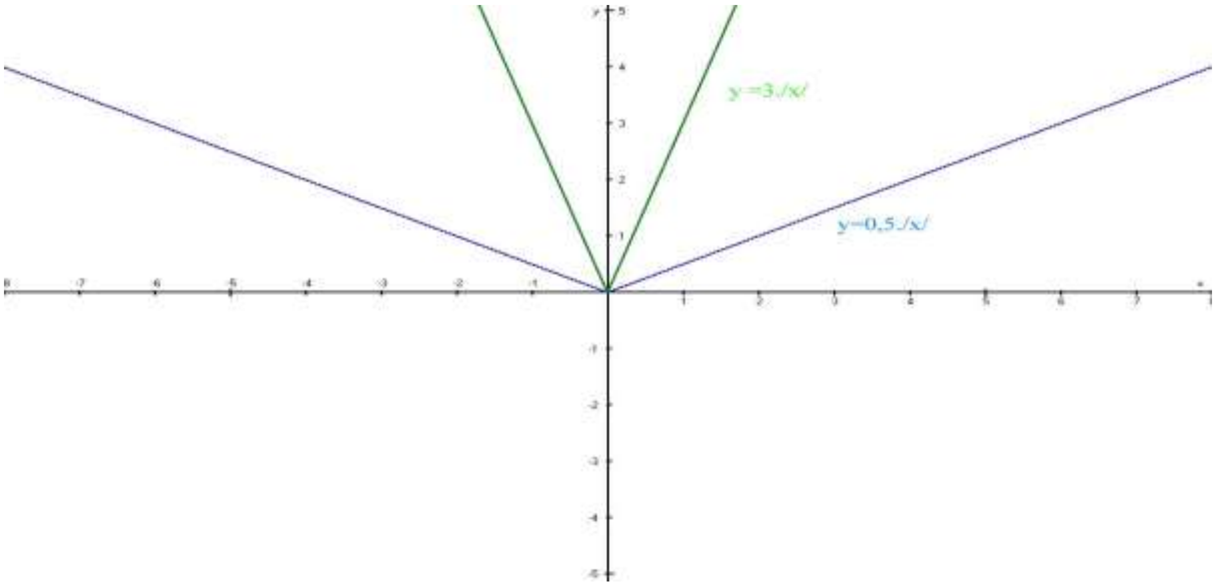
5.6. Funkce s absolutní hodnotou

y = k.| x | - funkce s absolutní hodnotou
<u>k</u> – koeficient a, b, - reálné číslo
Je-li definičním oborem obor reálných čísel, pak grafem funkce s absolutní hodnotu jsou dvě polopřímky se společným počátečním bodem.

Příklad : Narýsujte graf funkce :
a) y = | x | b) y = - | x | c) y = 0,5. | x | d) y = 3. | x | e) y = 2. | x + 1 | f) y = 2. | x - 1 | + 0,5
a) y = | x | b) y = - | x |

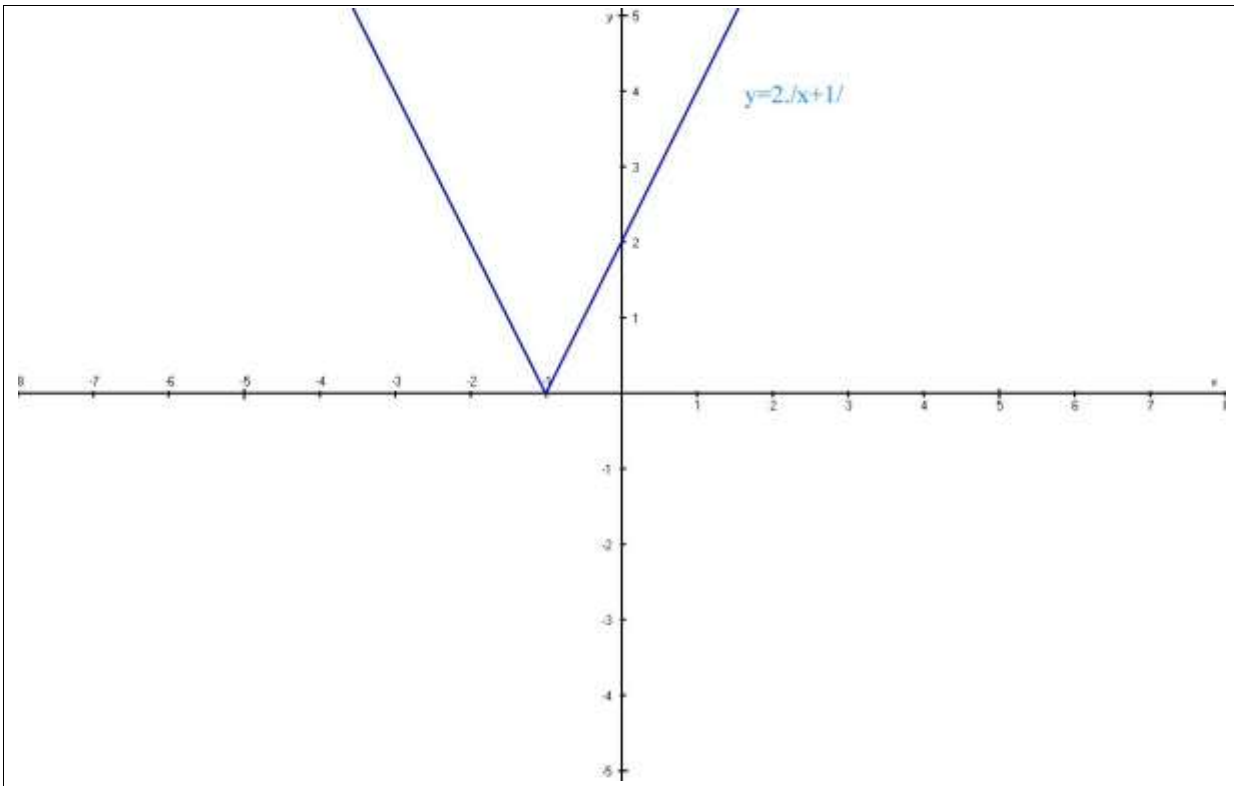


c) y = 0,5. │x│ d) y = 3. │x│

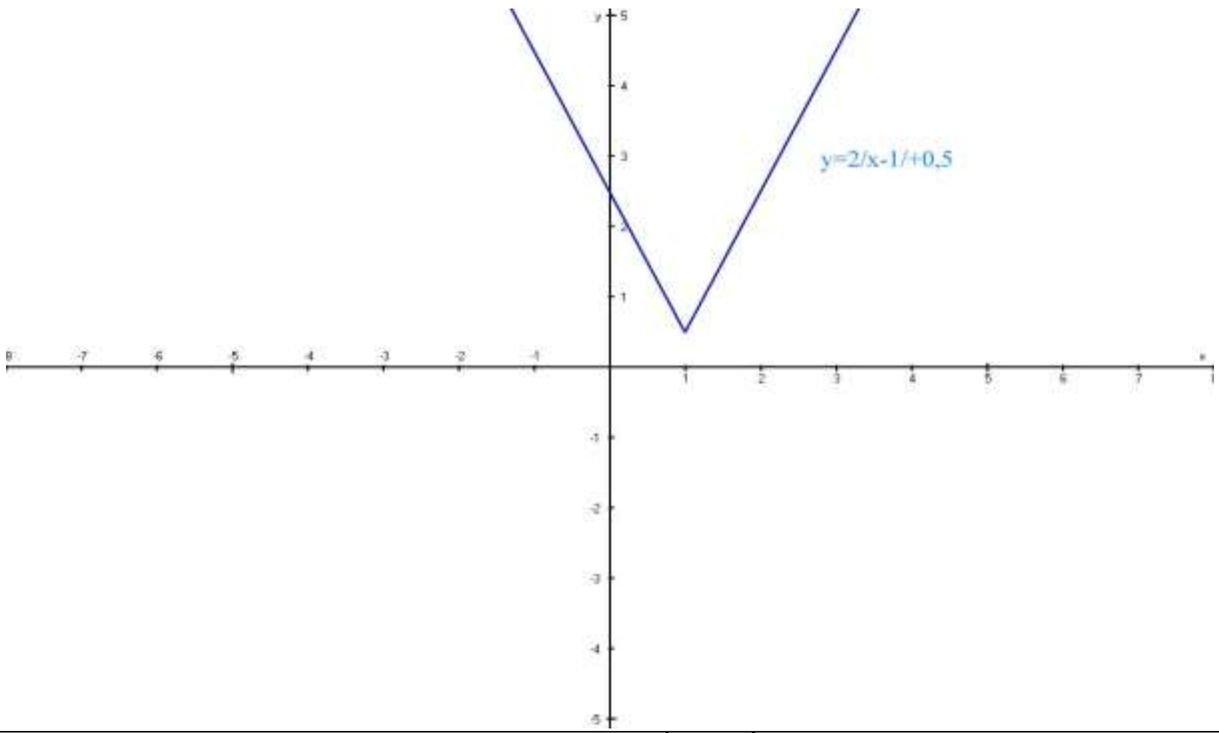


Graf funkce s absolutní hodnotou tvaru : a) y = k . │x│je v celém oboru reálných čísel osově souměrný s osou y.

e) y = 2.│x + 1│



f) $y = 2.|x - 1| + 0,5$



Graf funkce s absolutní hodnotou tvaru : a) $y = k . |x + a| + b$ je v celém oboru reálných čísel osově souměrný s osou $y = -a$

Je-li <u>b</u> = 0 $\Rightarrow$ Společný počátek obou polopřímek je na ose x.

Příklad 26 : Narýsujte graf funkce :

a) $y = 3.|x|$
b) $y = -0,1.|x|$
c) $y = 3.|x + 2|$
d) $y = 2.|x - 1| - 0,5$
e) $y = 3.|2x - 1| + 0,4$

Příklad 27 : Narýsujte graf funkce y = k. | x | , který prochází bodem A ≡ [2 ; 4] .

Příklad 28 : Bod A ≡ [2 ; 4] leží na grafu funkce y = k. | x | . Který další bod leží na grafu stejné funkce :

a) X ≡ [-2 ; 4]
b) Y ≡ [2 ; -4]
c) Z ≡ [-2 ; -4]
d) K ≡ [3 ; 4]
e) L ≡ [3 ; 3]
f) M ≡ [3 ; 6]
g) N ≡ [5 ; 4]

5.7. Goniometrické funkce

5.7.1. Goniometrické funkce ostrého úhlu

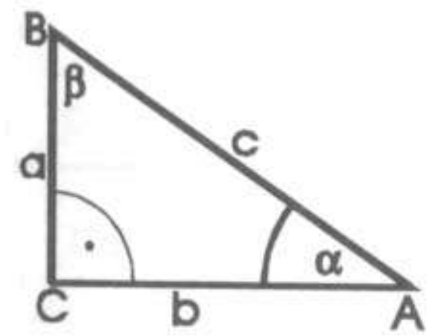
(opakujeme učivo 8. ročníku)

Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníka se nazývá sinus úhlu α - píšeme sin α

Poměr délky přilehl odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníka se nazývá kosinus úhlu α - píšeme cos α

Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka se nazývá tanges úhlu α - píšeme tg α

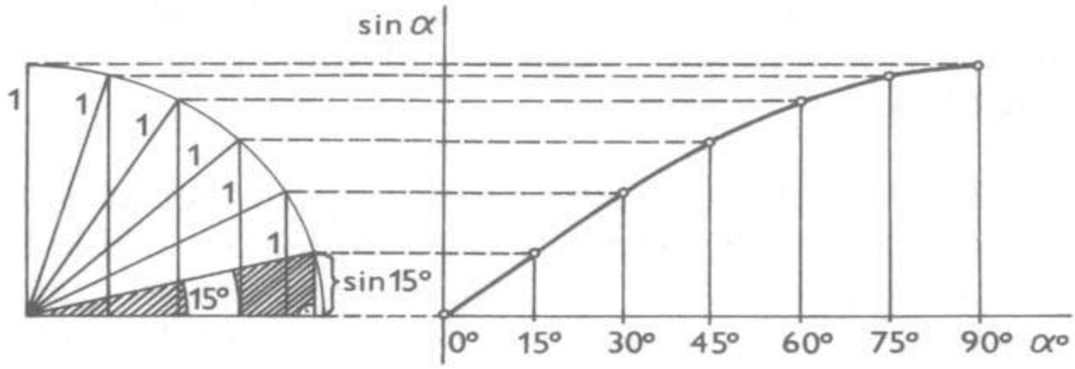
Poměr délky přilehlé odvěsny a délky protilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka se nazývá kotanges úhlu α - píšeme cotg α



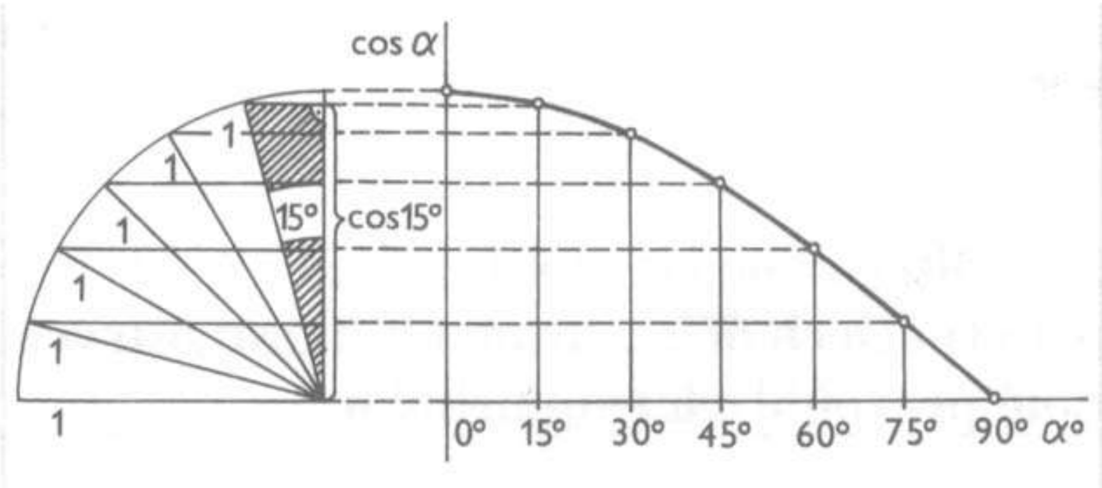
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c.\sin\alpha}{c.\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

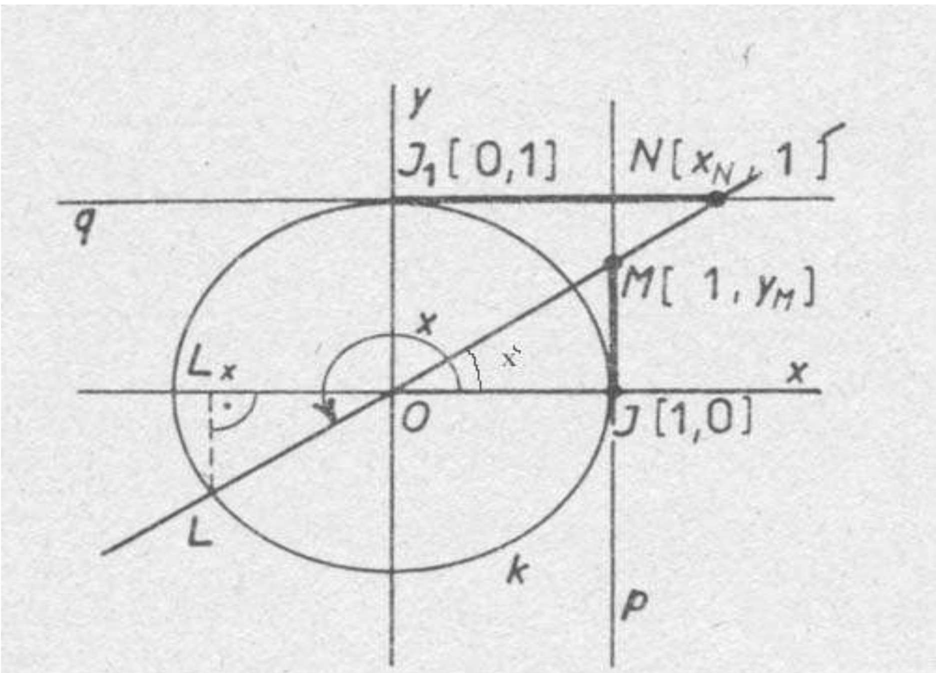
$$tg\alpha = \frac{1}{\cot g\alpha}$$



Průběh funkce sin α v intervalu < 0° ; 90 ° >

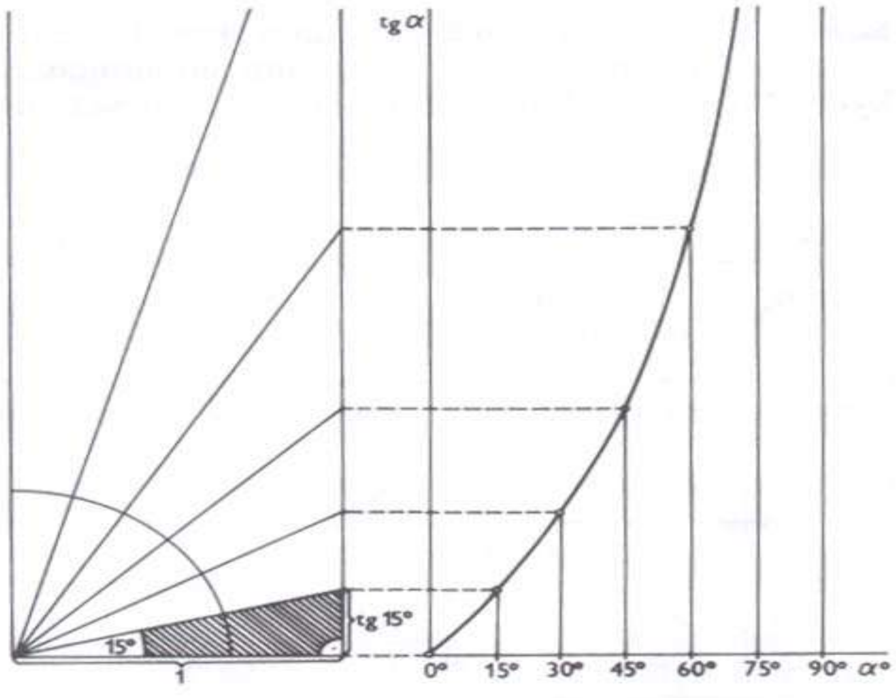


Průběh funkce cos α v intervalu < 0° ; 90 ° >



Určení funkce tangens a kotangens pomocí jednotkové kružnice
$x = x' + 180°$ $\quad$ $tg\ x = tg\ x'$ $\quad$ tangens úhlu x´je y_M

cotg x´ je x_N



Průběh funkce tg α v intervalu < 0° ; 90 ° >

Přehledná tabulka goniometrických funkcí základních úhlů

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}.\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}.\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{3}.\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	N
cotg α	N	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}.\sqrt{3}$	0

5.7.2. Goniometrické funkce v intervalu od 90 ° a více

Vyjádření goniometrických funkcí úhlů v II. kvadrantu :

sin 110 ° = sin (180° - 110 °) = sin 70 °
cos 110 ° = - cos 70°

tg 110 ° = - tg 70 °
cotg 110 ° = - cotg 70 °

Vyjádření goniometrických funkcí úhlů v III. kvadrantu :

sin 200 ° = sin (180 ° + 20 °) = - sin 20 °
cos 200 ° = - cos 20 °
tg 200 ° = tg 20 °
cotg 200 ° = cotg 20 °

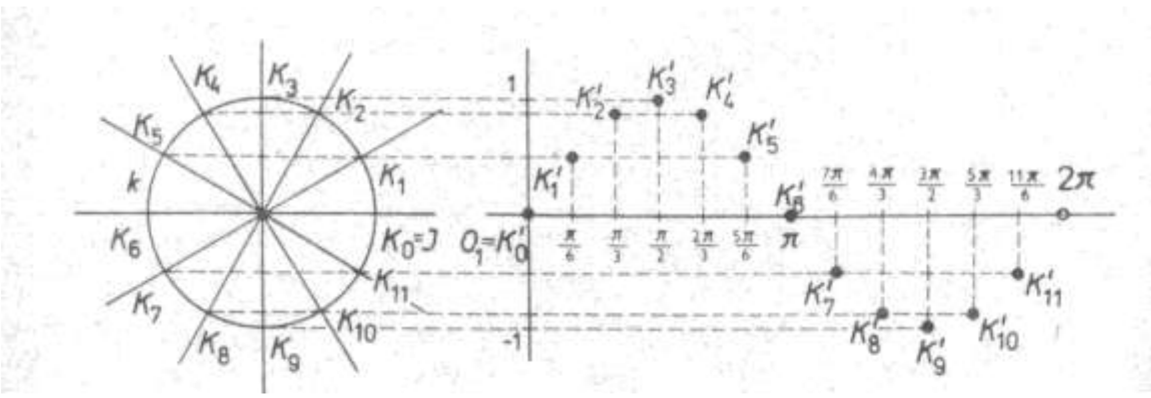
Vyjádření goniometrických funkcí úhlů v IV. kvadrantu :

sin 300 ° = - sin 60 °
cos 300 ° = cos 60 °
tg 300 ° = - tg 60 °
cotg 300 ° = - cotg 60 °

Přehledná tabulka goniometrických funkcí v intervalu 0 ° - 360 °

	0 °-90 °	90 °-180 °	180 °-270 °	270 °-360 °
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

Postup při vytváření grafu funkce sin α

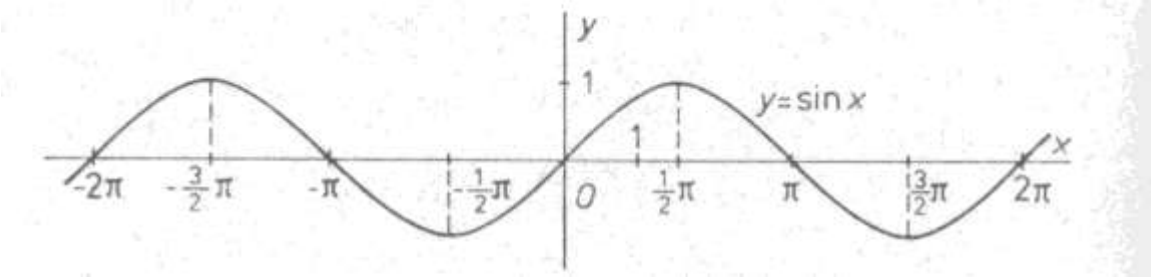


Hodnoty záporného úhlu :

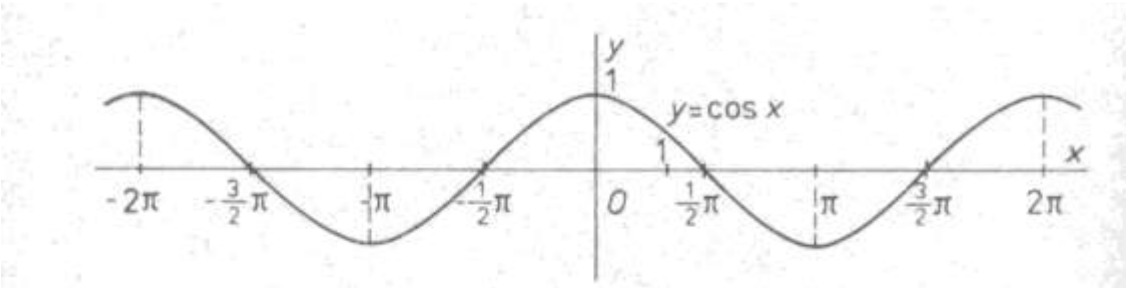
sin (- α) = - sin α
cos (- α **)** = cos α

tg (-α **)** = - tg α
cotg (- α) = -cotg α

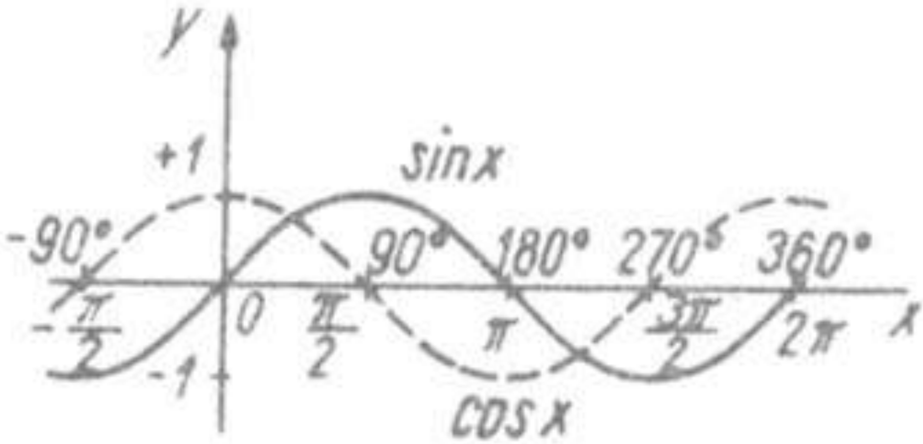
Průběh funkce sin α **:**



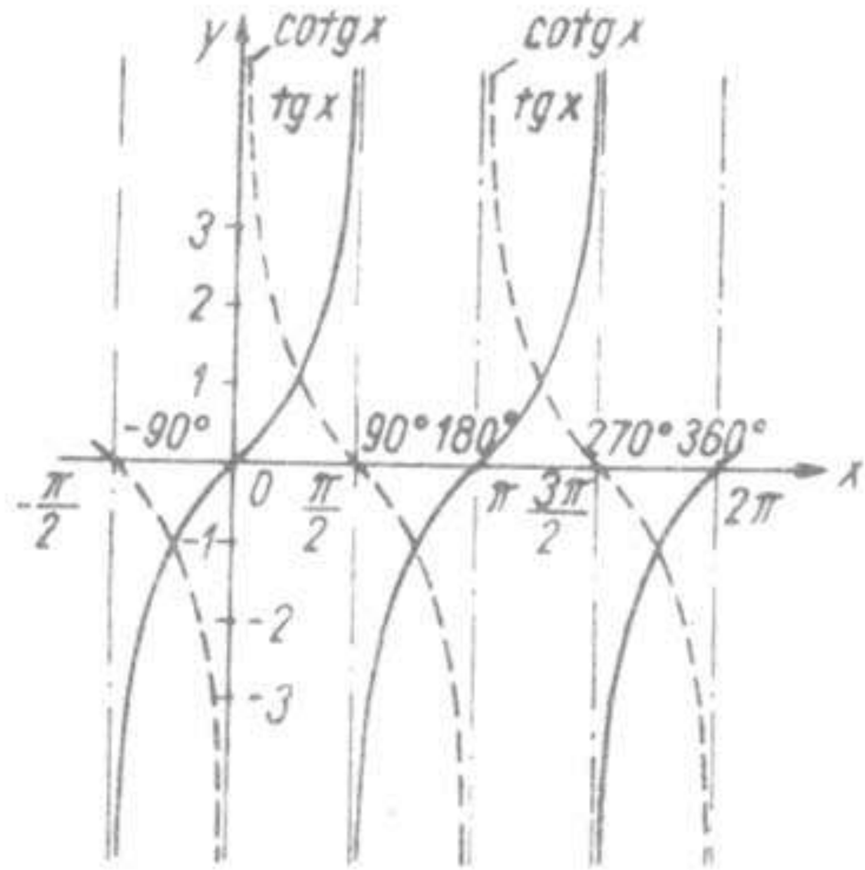
Průběh funkce cos α **:**



Vzájemný vztah funkce sin α a cos α



Vzájemný vztah funkce tg α a cotg α



Pro úhly větší než 360 ° platí : sin (α + 360.k) = sin α

cos (α + 360.k) = cos α

tg (α + 180.k) = tg α

cotg (α + 180.k) = cotg α

Příklad : Vypočítejte :

a) sin 150 °   b) cos 330 °   c) sin 500 ° d) sin (- 1000 °)   e) sin 4. π

f) cos $\frac{13}{3}.\pi$ g) cos (- $\frac{21}{4}.\pi$)

Řešení :

a) sin 150 ° = sin 30 ° = 0,5   b) cos 330 ° = cos 30 ° = $\frac{1}{2}.\sqrt{3}$

c) sin 500 ° = sin 140 ° = sin 40 ° = 0,6428   d) sin (- 1000 °) = - sin 1000 ° =
= -sin 280 ° = - (- sin 80 °) = sin 80 ° = 0,9848   e) sin 4. π = sin 720 ° = sin 0 ° = 0

f) cos $\frac{13}{3}.\pi$ = cos $4\frac{1}{3}\pi$ = cos $\frac{1}{3}\pi$ = 0,5   g) cos (- $\frac{21}{4}.\pi$) = cos ($-5\frac{1}{4}.\pi$) =
= cos $\frac{3}{4}.\pi$ = cos $\frac{3}{4}$.180 ° = cos 135 ° = - cos 45 ° = $-\frac{1}{2}.\sqrt{2}$

Příklad 29 : Určete :

a) sin 10 ° =   d) sin 90 ° =   g) sin 300 ° =   j) sin (-10 °) =
b) sin 45 ° =   e) sin 100 ° =   h) sin 400 ° =   k) sin (-66°) =
c) sin 66° =   f) sin 200° =   i) sin 800 ° =   l) sin (-90 °) =

m) sin (-100 °) =
n) sin (-200°) =
o) sin (-400 °) =
p) sin (-800°) =
r) sin $\frac{\pi}{5}$ =
s) sin $\frac{\pi}{4}$ =
t) sin (-$\frac{\pi}{2}$)=
u) sin $\frac{10.\pi}{3}$
v) sin (-$\frac{15.\pi}{2}$)=
w) sin $\frac{16}{3}\pi$ =
x) sin 7π =
y) sin (-5,5π) =

Příklad 30 : Určete :
a) cos 10 ° =
b) cos 45 ° =
c) cos 66° =
d) cos 90 ° =
e) cos 100 ° =
f) cos 200° =
g) cos 300 ° =
h) cos 400 ° =
i) cos 800 ° =
j) cos (-10 °) =
k) cos (-66°) =
l) cos (-90 °) =
m) cos (-100 °)=
n) cos (-200°) =
o) cos (-400 °) =
p) cos (-800 °) =
r) cos $\frac{\pi}{5}$ =
s) cos $\frac{\pi}{4}$ =
t) cos (-$\frac{\pi}{2}$)=
u) cos $\frac{10.\pi}{3}$
v) cos (-$\frac{15.\pi}{2}$)=
w) cos $\frac{16}{3}\pi$ =
x) cos 7π =
y) cos (-5,5π) =

Příklad 31 : Určete :
a) tg 10 ° =
b) cotg 45 ° =
c) tg 66° =
d) cotg 90 ° =
e) cotg 100 ° =
f) tg 200° =
g) cotg 300 ° =
h) tg 400 ° =
i) cotg 800 ° =
j) tg (-10 °) =
k) cotg (-66°) =
l) tg (-90 °) =
m) cotg (-100 °)=
n) tg (-200°) =
o) tg (-400 °) =
p) cotg (-800 °) =
r) tg $\frac{\pi}{5}$ =
s) cotg $\frac{\pi}{4}$ =
t) tg (-$\frac{\pi}{2}$)=
u) tg $\frac{10.\pi}{3}$
v) cotg (-$\frac{15.\pi}{2}$)=
w) tg $\frac{16}{3}\pi$ =
x) cotg 7π =
y) tg (-5,5π) =

Příklad 32 : Sestrojte graf funkce :
a) y =sin α D : < -π ; 3π > b) y = cos α D : < -2π ; 3,5.π > c) y = tg α D : < 0° ; 270° >

Příklad 33 : Určete, zda funkce :
a) y =sin α D : < 0; 0,5.π > je klesající
b) y =sin α D : < 180°; 270° > je klesající
c) y =tg α D : < 0; 0,5.π > je klesající
d) y =cotg α D : < 270 °; 360 ° > je rostoucí
e) y =cos α D : <180°; 270°> je klesající

Příklad 34 : Určete velikost úhlu v intervalu 0° - 90° :
a) sin α = 0,5
b) tg α = 1
c) cos α = 0,5.$\sqrt{2}$
d) cotg α = $\sqrt{3}$
e) sin α = 0
f) cos α = 1
g) tg α = $\sqrt{3}$
h) sin α = 0,5. $\sqrt{3}$
i) cotg α = $\frac{1}{3}.\sqrt{3}$
j) cotg α = 0
k) sin α = 0,5. $\sqrt{2}$
l) cos α = 0,5. $\sqrt{3}$
m) tg α = $\frac{1}{3}.\sqrt{3}$
n) sin α = 0,5. $\sqrt{2}$
o) cotg α = 1
p) sin α = 0,9063
r) tg α = 5,309
s) cotg α = 49,104
t) tg α = 0,1778
u) sin α = 0,0236
v) cos α = 0,4226
w) sin α = 0,7400

Souhrnná cvičení

1) Povrch hranolu se čtvercovou podstavou je 64 cm^2. Určete délky hran, je-li výška o 10 cm delší než délka podstavné hrany.

2) Povrch válce je 56.π cm^2. Určete poloměr podstavy, je-li výška válce 3 cm.

3) Narýsujte graf kvadratické funkce :
a) $y = x^2 + 2x + 1$
b) $y = x^2 + 2x$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = (x + 2)^2 + 2x - 3$
e) $y = x^2 + 6x + 5$

4) Vypočítejte průsečík grafu funkce s osou x : a) $y = x^2 + 2x + 1$
b) $y = x^2 + 2x$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = (x + 2)^2 + 2x - 3$
e) $y = x^2 + 6x + 5$

5) Vypočítejte průsečík grafu funkce s osou y : a) $y = x^2 + 2x + 1$
b) $y = x^2 + 2x$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = (x + 2)^2 + 2x - 3$
e) $y = x^2 + 6x + 5$

6) Vypočítejte souřadnice vrcholu paraboly funkcí : a) $y = x^2 + 2x + 1$
b) $y = x^2 + 2x$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = x^2 + 6x + 5$

7) Řešte kvadratickou rovnici :
a) $x^2 + 5x + 4 = 0$
b) $x^2 + x - 12 = 0$
c) $x^2 + 7x + 12 = 0$
d) $x^2 - 7x + 12 = 0$
e) $x^2 - 4x + 3 = 0$
f) $5x^2 - 3x - 8 = 0$
g) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
h) $5x^2 - 24x - 5 = 0$
ch) $x^2 - 4 = 0$
i) $x^2 - 27 = 0$
j) $x^2 + 4 = 0$
k) $x^2 + 5x = 0$
l) $x^2 - 1 = 0$
m) $x^2 + x = 0$

8) Řešte kvadratickou rovnici :
a) $(x - 1) . (x - 4) = x - 4$
b) $\frac{2x^2}{5} - 4 = \frac{6x - 20}{5}$
c) $(x^2 - 64) . (x^2 - 49) = 0$
d) $\frac{x^2 - 13x + 15}{2x - 17} = \frac{4x - 3}{6} - \frac{1}{3}$
e) $x^2 + 4x = 12$
f) $x^2 = x + 42$
g) $x - \frac{1}{x - 1} = 1 + \frac{x}{x - 1}$
h) $\frac{3x + 2}{x - 2} + 1 = \frac{2x}{x - 3}$
ch) $\frac{x}{x + 3} + \frac{x + 3}{x} = \frac{9}{x.\ x + 3}$
i) $\frac{x + 1}{2x - 1} = \frac{2.\ x - 1}{x + 2}$
j) $\frac{x - 1}{x - 5} + \frac{x + 3}{x - 3} = 4$
k) $\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x + 2} = \frac{3}{8}$
l) $\dfrac{\frac{x}{3} + 1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{x}{6}} = \dfrac{\frac{x}{4} + \frac{x}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{x}{12}}$

9) Vyřešte tyto rovnice vyššího řádu v oboru reálných čísel :
a) $x^3 = 0$
b) $x^3 = -8$
c) $x^3 - x = 0$
d) $4x^5 - x^3 = 0$
e) $x^4 - 16x^2 = 0$
f) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

10) Vypočítejte k tak, aby daná rovnice měla jeden kořen rovnající se nule a vypočítejte její druhý kořen
a) $2kx^2 - 5.(k + 1).x + (k - 1) = 0$
b) $(k - 1).x^2 - (k - 2)x + k.(k - 3) = 0$

11) Určete tři za sebou následující celá čísla, která mají tu vlastnost, že čtverec prostředního čísla je o 1 větší než součin obou krajních čísel.

12) Najděte v kvadratické rovnici absolutní člen tak, aby rovnice měla dvojnásobný reálný kořen a tento kořen potom vypočítejte : a) $x^2 - 7x + k = 0$ b) $0{,}2x^2 + 3x + k = 0$

13) Řešte graficky kvadratické rovnice :

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$
b) $x^2 + 2x = 0$
c) $x^2 - 5 = 0$
d) $(x + 2)^2 + 2x - 3 = 0$
e) $2x^2 + 6x + 5 = 0$
f) $5x^2 - 3x - 8 = 0$
g) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
h) $5x^2 - 24x - 5 = 0$
ch) $x^2 - 4 = 0$
i) $x^2 - 27 = 0$
j) $x^2 + 4 = 0$
k) $x^2 + 5x = 0$
l) $x^2 - 1 = 0$
m) $x^2 + x = 0$

14) Řešte numericky a graficky kvadratické nerovnice :

a) $x^2 + 9x - 10 \leq 0$
b) $x^2 + 12x + 20 < 0$
c) $x^2 - 15x + 56 < 0$
d) $x^2 - 3x - 28 \leq 0$
e) $2x^2 + 14x + 12 > 0$
f) $-2x^2 + 14x - 12 > 0$
g) $3x^2 - 2x - 5 \geq 0$
h) $3x^2 - 10x + 8 \leq 0$
ch) $x^2 + 2x - 8 < 0$
i) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

15) Určete graf závislosti U na I při stálém výkonu žárovky 100W. Proud uvažujte od 1 A do 5 A (P = U.I).

16) Napište :

a) rovnici funkce $y = \dfrac{k}{2x-3}$, jejíž graf prochází bodem A ≡ [2 ; 4]

b)) rovnici funkce $y = \dfrac{k}{x+2}$, jejíž graf prochází bodem B ≡ [-1 ; -3].

17) Napište rovnici funkce $y = \dfrac{2}{ax+b}$, jejíž graf prochází bodem A ≡ [0 ; -0,5] a B ≡ [0,5 ; -0,8].

18) Sestrojte graf funkce :

a) $y = -|x|$
b) $y = 3.|x|$
c) $y = -4.|x| + 3$
d) $y = 2.|x - 2| + 2$
e) $y = 4.|x + 1| - 5$

19) Sestrojte graf funkce :

a) $y = k.|x|$, která prochází bodem D ≡ [1 ; 4] v intervalu $-3 \leq x < 5$
b) $y = k.|x|$, která prochází bodem E ≡ [1 ; 4] , kde definičním oborem je množina přirozených čísel
c) $y = k.|x| + a$, která prochází bodem F ≡ [2 ; 7] a bodem G ≡ [4 ; 13]

20) Který z bodů A ≡ [2 ; 4], B ≡ [2 ; 7], C ≡ [2 ; 5], D ≡ [5 ; 4] leží na grafu funkce $y = 2.|x + 1| - 1$

21) Bodem A [4 ; 2] a bodem B [-1 ; -2] prochází graf lineární funkce. Určete jeho rovnici.

22) Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf je rovnoběžný s grafem funkce $y = -2x + 9$ a prochází bodem C [2 ; 3].

23) Určete průsečíky grafu funkce $y = 4x - 7$ s osami x a y.

24) Leží bod A [-4 ; 0] na grafu funkce $y = 2x + 8$?

25) Z Prahy do Brna (180 km) jelo z Prahy auto průměrnou rychlostí 60 km za hodinu.

a) narýsujte graf závislosti ujeté dráhy na čase
b) narýsujte graf závislosti průměrné rychlosti na čase
c) narýsujte graf dráhy, kterou ještě auto musí ujet, na čase

26) Graficky vyřešte soustavu rovnic :
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}$$

27) Vyjádřete rovnicí a grafem závislosti obsahu kruhu S na jeho průměru d, je-li d v intervalu (0,5 dm; 4 dm).

28) Graficky určete průsečík funkcí : $y = (x-2)^2 - 1$
$y = 2 : x$

29) Bodem A (3 ; 2) a bodem B [-5 ; -1] prochází graf lineární funkce. Urči jeho rovnici.

30) Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf je rovnoběžný s grafem funkce y = - 3x + 4 a prochází bodem C [5 ; 3].

31) Určete průsečíky grafu funkce y = 2x-1 s osami x a y.

32) Leží bod A [-4 ; 0] na grafu funkce y = 2x + 5?

33) Z Prahy do Ostravy (240 km) jelo z Prahy auto průměrnou rychlostí 80 km za hodinu.
a) narýsujte graf závislosti ujeté dráhy na čase
b) narýsujte graf závislosti průměrné rychlosti na čase
c) narýsujte graf dráhy, kterou ještě auto musí ujet, na čase

34) Graficky vyřešte soustavu rovnic : $x + y = 5$
$3x - y = 1$

35) Graficky určete průsečík funkcí : $y = (x-3)^2 - 2$
$y = 3 : x$

36) Určete :
a) tg 30 ° =
b) cos 45 ° =
c) sin 75° =
d) cos -90 ° =
e) sin 100 ° =
f) cotg 20° =
g) cotg -30 ° =
h) sin 0 ° =
i) cotg 0 ° =
j) sin -80 ° =
k) tg -26° =
l) sin -90 ° =
m) cos 100 °=
n) cotg -1200° =
o) tg -300 ° =
p) sin -800 ° =
r) tg $\frac{3\pi}{5}$ =
s) cotg $\frac{7\pi}{4}$ =
t) tg $\frac{\pi}{2}$ =
u) sin $\frac{10.\pi}{3}$
v) cos $-\frac{15.\pi}{2}$ =
w) tg $\frac{16}{5}\pi$ =
x) cotg $8{,}5\pi$ =
y) sin $-5{,}5\pi$ =

37) Určete, zda funkce :
a) $y = \cos\alpha$ D : < 0; 0,5.π > je klesající
b) $y = \text{tg}\,\alpha$ D : < 180°; 270° > je rostoucí
c) $y = \sin\alpha$ D : < 0; 0,5.π > je klesající
d) $y = \cos\alpha$ D : < 270 °; 360 ° > je rostoucí
e) $y = \text{cotg}\,\alpha$ D : <180°; 270°> je klesající

38) Sestroj úhel α , pro který platí :
a) tg $\alpha = \frac{1}{3}$
b) cos $\alpha = \frac{2}{7}$
c) sin α = 0,6
d) cotg $\alpha = 1\frac{2}{3}$

39) Řešte kvadratickou rovnici : a) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$ b) $\frac{\frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}}{\frac{x}{3}-\frac{x+1}{4}}=x$

Výsledky :

2 a) y = k.(x + a)^2 + b, kde k > 0, a – libovolné reálné číslo, b – libovolné kladné reálné číslo,
b) y = k.(x + a)^2 + b, kde k < 0, a – libovolné reálné číslo, b – libovolné záporné reálné číslo,
c) y = x^2, definičním oborem je množina čísel { 1; 2 },
3 a) [0; 0], **b)** nemá řešení, **c)** [-1; 0] a [1; 0], **d)** [-2; 0] a [4; 0], **e)** [-9; 0] a [8; 0],
f) [-1; 0], **g)** [-2; 0] a [0; 0], **h)** nemá řešení ,
4 a) [0; 0] , **b)** [0; 1], **c)** [0; -1], **d)** [0; -8], **e)** [0; -72], **f)** [0; 1], **g)** [0; 0], **h)** [0; 10],
5 a) [0; 0], **b)** [0; 1], **c)** [0; -1], **d)** [1; -9], **e)** [-0,5; -72,25], **f)** [-1; 0], **g)** [-1; 1],
6) 8,
7 a) nemá řešení, **b)** 4; -1, **c)** -0,5; 0,5, **d)** 0; 0,8, **e)** nemá řešení, **f)** -5; -1, **g)** 20; -4,
h) $-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ $x \neq 0$ $x \neq 2$, **ch)** 1,5 $x \neq 0,5$, **i)** 0; 5 $x \neq 2$ $x \neq 3$, **j)** -4 ; 4,
k) nemá řešení, **l)** 0; 1 , **m)** -2; 6, **n)** -3; 1 , **o)** 2; 5, **p)** $-\frac{2}{3}$; -1,5 , **r)** -0,2 ; 5 ,
s) 2; 2,5 , **t)** 1; 9 , **u)** 2; 26 , **v)** 3; $x \neq -2$ $x \neq 2$, **w)** nemá řešení $x \neq 0$ $x \neq \frac{2}{3}$ $x \neq -\frac{2}{3}$,
8 a) 0; 14 , **b)** 0; 5 , **c)** 0; $\frac{2}{3}$, **d)** -6; 6 **e)** $\sqrt{5}$ **;** $-\sqrt{5}$, **f)** -4 , **g)** 0; 4 $x \neq -1$ $x \neq 1,5$,
h) -3; 3 $x \neq -1$ $x \neq 1$, **ch)** 0; 9 $x \neq -3,5$ $x \neq 2\frac{1}{3}$, **i)** 0 ; 4 , **j)** 0 ,
9a) a = 0, **10 a)** a = -0,5 $x_1 = -0,6$ $x_2 = 0,6$,**11)** 24 cm,**12)** 17 cm,**13)** 7 cm, 13 cm,**14)** 8,**15)** 17,
16 a) 0, **b)** $\sqrt{1,25}$ $-\sqrt{1,25}$, **c)** $-1+\sqrt{6}$ $-1-\sqrt{6}$, **d)** $5+\sqrt{5}$ $5-\sqrt{5}$, **e)** 0; -2 , **f)** -1; 4 ,
g) nemá řešení, **h)** nemá řešení,
17 a) 2, **b)** nemá řešení, **c)** prázdná množina, **d)** $-5 \leq x$ nebo $x \geq 5$,
e) $-7 < x < 7$, **f)** $-2 < x < 3$, **g)** $-1 < x < 7$, **h)** $x \leq -11$ nebo $x \geq 5$, **ch)** $x < -7$ nebo $x > -5$, **i)** $x \leq 2$ nebo $x \geq 20$, **j)** $x < -3$ nebo $x > 10$, **k)** $1\frac{1}{3} \leq x \leq 2$, **l)** $-3 < x < 1$,
19) $y = \frac{3}{x}$, **20)** k = 6**21)** bod B,**24 a)** $y = \frac{1}{3x-2}$ $x \neq \frac{2}{3}$, **b)** $y = \frac{-1}{x+1}$ $x \neq -1$,**25)** $y = \frac{3}{2x+1}$ $x \neq -0,5$,
27) y = 2x ,**28)** správně X ≡ [-2 ; 4] , M ≡[3; 6],
29 a) 0,1736 , **b)** 0,5. $\sqrt{2}$, **c)** 0,9135 , **d)** 1 , **e)** 0,9848 , **f)** -0,3420 , **g)** -0,5. $\sqrt{3}$,
h) 0,6428 , **i)** 0,9848 , **j)** -0,1736 , **k)** -0,9135 , **l)** -1 , **m)** -0,9848 , **n)** 0,3420 ,
o) 0,6428 , **p)** -0,9848 , **r)** 0,5878 , **s)** 0,5. $\sqrt{2}$, **t)** -1 , **u)** -0,5. $\sqrt{3}$, **v)** 1 ,
w) -0,5. $\sqrt{3}$, **x)** 0 , **y)** 1 ,

30 a) 0,9848 , **b)** 0,5. $\sqrt{2}$, **c)** 0,4067 , **d)** 0 , **e)** -0,17368 , **f)** -0,9367 , **g)** 0,5 ,
h) 0,7760 , **i)** 0,1736 , **j)** 0,9848 , **k)** 0,4067 , **l)** 0 , **m)** -0,1736 , **n)** -0,9397 ,
o) 0,7660 , **p)** 0,1736 , **r)** 0,8090 , **s)** 0,5. $\sqrt{2}$, **t)** 0 , **u)** -0,5 , **v)** 0 , **w)** -0,5 ,
x) -1 , **y)** 0 ,
31 a) 0,1736 , **b)**1, **c)** 2,246 , **d)** 0 , **e)** 0,1763 , **f)** 0,3640 , **g)** -0,5774 ,
h) $\sqrt{3}$, **i)** **5**,671 , **j)** -0,1763 , **k)** -0,4452 , **l)** nedef. , **m)** -0,1736 , **n)** -0,3640 ,
o) -0,8391 , **p)** -0,1763 , **r)** 0,7265 , **s)** 1 , **t)** nedef. , **u)** $\sqrt{3}$, **v)** nedef. ,

w) $\sqrt{3}$, **x)** nedef. , **y)** nedef. ,
33 a) ne, **b)** ano , **c)** ne , **d)** ne , **e)** ne ,
34 a) 30° , **b)** 45° , **c)** 45° , **d)** 30° , **e)** 0° , **f)** 0° , **g)** 60° , **h)** 60° , **i)** 60° , **j)** 90° , **k)** 45° , **l)** 30° , **m)** 30° , **n)** 45° , **o)** 45° , **p)** 65° , **r)** 79° 20’ , **s)** 1° 1’, **t)** 10° 5’ , **u)** 1° 21’ , **v)** 65° , **w)** **47°** 44’

Souhrnná cvičení

1) a = $1\frac{1}{3}$ cm, v = $11\frac{1}{3}$ cm,**2)** r = 4 cm,

4a) [-1; 0], **b)** [0; 0] a [-2; 0] , **c)** [-$\sqrt{5}$; 0] [$\sqrt{5}$; 0] , **d)** [-3+2$\sqrt{2}$; 0] [-3-2$\sqrt{2}$; 0]
e) [-1; 0], [-5; 0],
5 a) [0; 1], **b)** [0; 0], **c)** [0; -5], **d)** [0; 1], **e)** [0; 5],
6 a) [-1; 0], **b)** [-1; -1], **c)** [0; -5], **d)** [-3; -4],

7 a) -1 ; -4 , **b)** -4 ; 3 , **c)** -4; -3 , **d)** 3; 4 , **e)** 1; 3, **f)** -1; 1,6 , **g)** $-\frac{2}{3}$; -1,5 , **h)** -0,2; 5 ,
ch) -2; 2 , **i)** $\sqrt{27}$ -$\sqrt{27}$, **j)** nemá řešení, **k)** 0; -5 , **l)** -1; 1 , **m)** -1; 0,

8 a) -2; 0 , **b)** 0;3 , **c)** -8; -7; 7; 8, **d)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$; $-\frac{\sqrt{10}}{2}$, **e)** -6;2 , **f)** -6; 7 , **g)** 0; 3 x ≠ 1 ,
h) 0; 4 x ≠ 2 x ≠ 3 , **ch)** nemá řešení x ≠ 0 x ≠ -3 , **i)** 0; 3 x ≠0,5 x ≠ 2 ,
j) 4**;** 9 x ≠ 3 x ≠ 5 , **k)** -4**;** 6 x ≠ -2 x ≠ 4 , **l)** nemá řešení, x ≠ 3 x ≠ 8,

9 a) 0 , **b)** -2 , **c)** -1; 0; 1, **d)** -0,5; 0; 0,5 , **e)** -4**;** 0; 4 , **f)** -2; 2 ,
10 a) k = 1 x_2 = 5 , **b)** k_1 = 0 x_2 = 2 nebo k_2 = 3 x_2 = 0,5 ,**11)** libovolná třu za sebou jdoucí celá čísla,
12 a) k = 12,25 x = 3,5 , **b)** k = 11,25 x = -7,5 ,

13 a) -1, **b)** 0 **;** -2; **c)** -5 **;** 5, **d)** -3+2$\sqrt{2}$ **;** -3-2$\sqrt{2}$, **e)** nemá řešení , **f)** -1; 1,6 , **g)** $-\frac{2}{3}$; -1,5 , **h)** -0,2; 5 , **ch)** -2; 2 , i) $\sqrt{27}$ -$\sqrt{27}$, j) nemá řešení, k) 0; 5 , l) -1; 1 , m) -1; 0,
14 a) -10 ≤ x ≤ 1 , **b)** -10 < x <-2 , **c)** 7 < x < 8, **d)** -4 **≤** x ≤ 7, **e)** x < -6 nebo x > -1 ,
f) x > 6 nebo x < 1, **g)** x **≤** 1 nebo x **≥** $1\frac{2}{3}$ **, h)** $1\frac{1}{3}$ < x ≤ 2 , **ch)** -4 < x < 2 , **i)** x **≤ -**4 nebo x **≥** 2,

16 a) $y = \frac{4}{2x-3}$ x **≠** 1,5 , **b)** $y = \frac{-3}{x+2}$ x ≠ -2, **17)** $y = \frac{2}{3x-4}$ x **≠** $1\frac{1}{3}$**,**
19 b) y = 4.│x│, **c)** y = 3.│x│+1,**20)** bod C .**21)** y = 0,8.x – 1,2 ,**22)** y = -2x + 7 ,
23) X ≡ [1,75 ; 0] Y ≡ [0 ; -7],**24)** ano ,
25 a) y = 60x D : x ∊ R ; 0 ≤ x ≤ 3 , **b)** v = 60 , **c))** y = 180 - 60x D : x ∊ R ; 0 ≤ x ≤ 3 ,
26) x = 2 y = 1 ,**27)** $S = \frac{\pi}{4}.d^2$,**29)** $y = \frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$,**30)** y = -3x + 18 ,**31)** X ≡ [0,5 ; 0], Y ≡ [0 ; -1] ,
32) ne ,**33 a)** y = 3x D : x ∊ R ; 0 ≤ x ≤ 3 , **b)** v = 80 , **c))** y = 240 - 60x D : x ∊ R ; 0 ≤ x ≤ 3 ,
34) x = 1,5 y = 3,5 ,

36 a) $\frac{1}{3}.\sqrt{3}$, **b)** 0,5. $\sqrt{2}$, **c)** 0,9659, **d)** 0, **e)** 0,9848, **f)** 2,747, **g)** - $\sqrt{3}$, **h)** 0,**i)** nedef., **j)** -09848 ,
k) -0,48771, **l)** -1, **m)** -0,1736 , **n)** $\frac{1}{3}.\sqrt{3}$, **o)** $\sqrt{3}$, **p)** -0,9848 , **r)** -3,078 , **s)** - $\frac{1}{3}.\sqrt{3}$, **t)** nedef. , **u)** -0,5. $\sqrt{3}$, **v)** 0 , **w)** 0,7265 , **x)** 0 , **y)** 1 ,
37 a) ano, **b)** ano , **c)** ne , **d)** ano , **e)** ano ,
38) vždy budeme sestrojovat pravoúhlý trojúhelník, který bude mít velikost příslušných stran v daném poměru,
39 a) 4 ; 9 x ≠ 3 x ≠ 5 , **b)** -2 , x ≠ 3