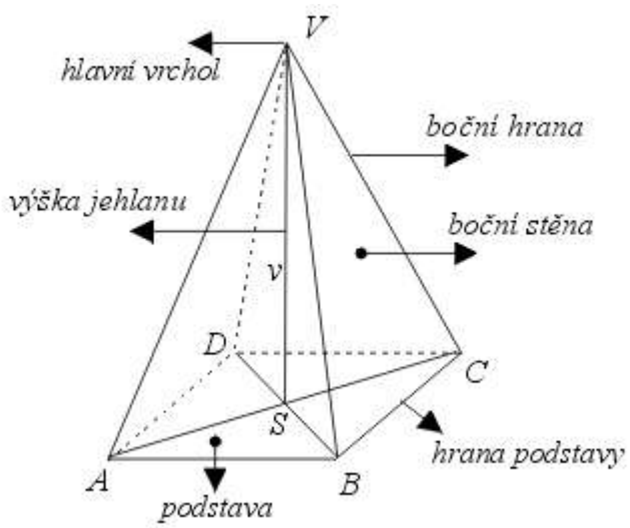
6. Jehlan, kužel, koule

6.1 Jehlan

(síť, objem, povrch)

· Jehlan je těleso, které má jednu podstavu tvaru *n*-úhelníku.
· Podle počtu vrcholů *n*-úhelníku má jehlan název.
· Stěny tvoří *n* rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem V (hlavní vrchol jehlanu).

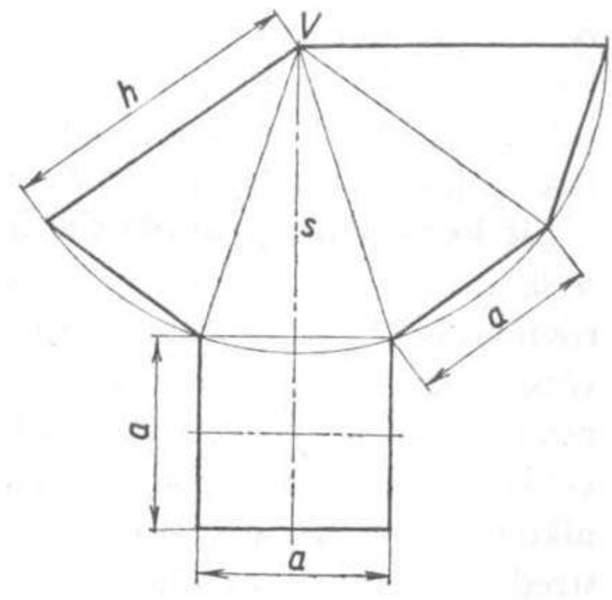


Boční stěny………. rovnoramenné trojúhelníky
Boční hrany ……... hrany, které vycházejí z hlavního vrcholu
Podstavné hrany…...strany podstav
Výška jehlanu……...je kolmá k podstavě a prochází jejím středem
(Vzdálenost hlavního vrcholu od podstavy.)

Povrch jehlanu: $S = S_p + S_{Pl}$

S_P **... obsah podstavy**
S_{Pl} **... obsah pláště**

Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$



Síť čtyřbokého jehlanu

Příklad : Je dán pravidelný čtyřboký jehlan s podstavnou hranou délky a = 12 cm a výškou v = 5 cm. Vypočítejte a) výšku boční stěny b) povrch c) objem d) úhlopříčku podstavy e) délku pobočné hrany f) úhel, který svírá boční stěna s podstavou

Řešení :

a) v_a – výška boční stěny $v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v_1^2$

$5^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = v_1^2$ $25 + 36 = v_1^2$ **v_1 = 7,8 cm**

b) $S = S_p + S_{pl}$ $S = a^2 + 4.\frac{1}{2}.a.v_1$

$S = 12^2 + 2.12.7,8$ $S = 144 + 187,2$ **$S = 331,2\ cm^2$**

c) $V = \frac{1}{3}.S_p.v$ $V = \frac{1}{3}.12^2.5$ $V = \frac{1}{3}.144.5$ **$V = 240\ cm^3$**

d) $u = a.\sqrt{2}$ $u = 12.\sqrt{2}$ **u = 16,97 cm**

e) h – délka pobočné hrany $h^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + v^2$

$h^2 = \left(\frac{16,97}{2}\right)^2 + 5^5$ $h^2 = 96,06$ **h = 9,8 cm**

f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\frac{12}{2}}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{6}$ **α = 39° 46´**

Příklad : Vypočtěte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, délku podstavné hrany 3 cm a délku pobočné hrany 5 cm.

Řešení : podstavou jehlanu je pravidelný šestiúhelník ABCDEF
S – střed podstavy (průsečík úhlopříček šestiúhelníku)
V – vrchol jehlanu
$a = 3$ cm $b = 5$ cm – délka pobočné hrany

Pro Δ ASV platí : $a^2 + v^2 = b^2$ $3^2 + v^2 = 5^2$ **$v = 4$ cm**
Pro podstavu platí : $S_P = 6.S\Delta$
Pro S< , který je rovnostranný platí : $S\Delta = \dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ **$S\Delta = \dfrac{3^2.\sqrt{3}}{4}$**
Pro podstavu platí : $S_P = 6.S\Delta = 6.\dfrac{3^2.\sqrt{3}}{4} = 13{,}5.\sqrt{3}$ **$S_P = 13{,}5.\sqrt{3} = 23{,}38$ cm^2**

Objem jehlanu $V = \dfrac{S_P.v}{3}$ $V = \dfrac{13{,}5.\sqrt{3}.4}{3}$ **$V = 18.\sqrt{3}$ cm^3**
Povrch jehlanu : $S = S_P + S_{pl}$ $S_{pl} = 6.S_1$ S_1 – obsah boční stěny jehlanu
Pro boční stěnu platí : je rovnoramenný trojúhelník v_1 – výška boční stěny
$b^2 = (0{,}5a)^2 + v_1^2$ $5^2 = 1{,}5^2 + v_1^2$ **$v_1 = 4{,}8$ cm**
$S_1 = \dfrac{a.v_1}{2}$ $S_1 = \dfrac{3.4{,}8}{2}$ **$S_1 = 7{,}2$ cm^2**
$S_{pl} = 6.S_1$ $S_{pl} = 6.7{,}2$ **$S_{pl} = 43{,}2$ cm^2**
$S = S_P + S_{pl}$ $S = 23{,}38 + 43{,}2$ **$S = 66{,}58$ cm^2**

Příklad 1 : Máme pravidelný čtyřboký jehlan s podstavnou hranou a = 10 cm a výškou v = 7 cm.
Vypočtěte : a) obsah podstavy b) obsah pláště c) povrch jehlanu
d) objem jehlanu

Příklad 2 : Máme čtyřboký jehlan, který má podstavu obdélník s rozměry 24 cm, 13 cm. Výška jehlanu je 18 cm. Vypočtěte : a) obsah podstavy b) obsah pláště
c) povrch jehlanu d) objem jehlanu

Příklad 3 : Pravidelný čtyřboký jehlan má objem 24 dm^3 a podstavnou hranu a = 4 dm.
Vypočtěte : a) výšku jehlanu b) výšku pobočné stěny c) povrch jehlanu

Příklad 4 : Máme čtyřboký jehlan, jehož podstavou je obdélník se stranami 18 cm a 10 cm. Výška boční stěny na podstavnou hranu délky 10 cm svírá s podstavou úhel 65°**.** Vypočtěte : a) obsah podstaty jehlanu
b) obsah pláště jehlanu c) povrch jehlanu

Příklad 5 : Objem jehlanu je 388 cm^3. Jeho podstava má rozměry 26,5 mm a 8 cm. Vypočtěte výšku jehlanu.

Příklad 6 : Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu je 73,5 m^3, jeho výška je 7 metr. Vypočtěte : a) obsah čtvercové podstavy b) délku strany čtverce podstavy

Příklad 7 : Pravidelný osmiboký jehlan má podstavnou hranu délky 6cm a výšku 9 cm. Vypočtěte objem jehlanu.

Příklad 8 : Vypočtěte povrch pravidelného čtyřstěnu (podstava a stěny jsou rovnostranné trojúhelníky), jehož hrana má délku 4 m.

Příklad 9 : Pravidelný čtyřboký jehlan má podstavnou hranu délky 7 cm a úhel určený dvěma protilehlými bočními hranami má velikost 33° 40´. Vypočtěte : a) povrch jehlanu
b) objem jehlanu

Příklad 10 : Pravidelný čtyřboký jehlan má délku podstavné hrany 6 cm a délku boční hrany je 11 cm. Vypočtěte : a) úhel, který svírá boční hrana s rovinou podstavy b) výšku jehlanu
c) objem jehlanu

Příklad 11 : Plášť pravidelného čtyřbokého jehlanu se skládá z rovnoramenných trojúhelníků, jejichž ramena mají délku 8cm a svírají úhel 56°**.** Vypočtěte : a) délku podstavné hrany b) povrch jehlanu c) objem jehlanu

Příklad 12 : Střecha domu má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou 12 m. Kolik m^2 je třeba na její pokrytí, jestliže sklon střechy 45° a na spoje a odpad počítáme 10% plechu navíc ?

Příklad 13 : Pravidelný čtyřboký jehlan má výšku 20 dm a objem 666,7 dm^3. Vypočtěte :
a) délku boční hrany jehlanu b) délku podstavné hrany

Příklad 14 : Pravidelný čtyřboký jehlan má výšku 14 dm a délku boční hrany 18 dm. Vypočtěte : a) povrch jehlanu b) objem jehlanu

Příklad 15 : Vypočítejte hmotnost těžítka tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 4 cm, výškou 6 cm, je-li zhotoveno z materiálu o hustotě
8 gramů/cm^3.

Příklad 16 : Pravidelný čtyřboký jehlan ze dřeva má délku podstavné hrany shodnou s výškou tělesa. Vypočtěte délku hrany z níž byl vyroben, víte-li, že jeho objem je 243 dm^3.

Příklad 17 : Kolik Kč stála látka na stan tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, včetně podlahy, s podstavnou hranou délky 2 metry a s tělesovou výškou 1,54 metru, je-li cena 1m^2 látky 125.- Kč a na překrytí a odpad počítáme 15% látky navíc? Množství potřebné látky zaokrouhlete na celé m^2 nahoru.

Příklad 18 : U pravidelného šestibokého jehlanu s délkou podstavné hrany 18 cm svírají jeho boční stěny s rovinou podstavy úhel 50°**.** Kolik litrů vzduch pojme ?

Příklad 19 : Pravidelný osmiboký jehlan s délkou podstavné hrany 5 dm má sklon bočních stěn pláště s rovinou podstavy 35°. Kolik bude stát natření pláště jehlanu, jestliže dvoukilogramová plechovka barvy stojí 120.-Kč a víme-li, že 2 gramy barvy stojí na natření
8 cm^2 ? Hodnotu práce nepočítáme.

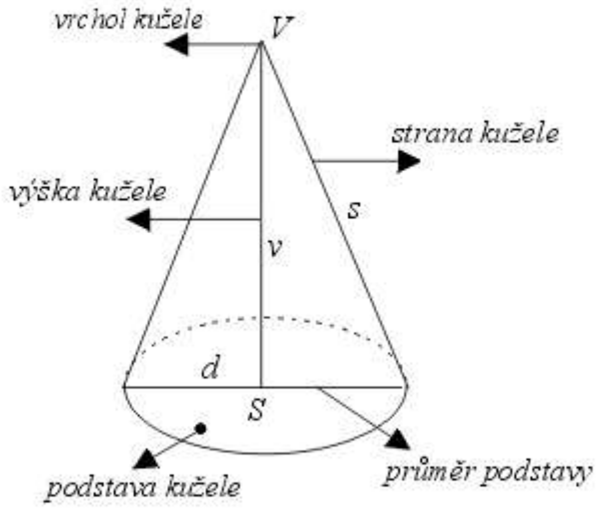
Příklad 20 : Podstavou pravidelného jehlanu je šestiúhelník, kterému můžeme opsat kružnici o poloměru 1 metr. Boční hrana měří 2 metry. Vypočtěte : a) objem jehlanu
b) povrch jehlanu

Příklad 21 : Vrchol věže je pravidelný šestiboký jehlan o podstavné hraně 1,5 metrů a výšce 5 metrů. Kolik m^2 plechu je třeba na pokrytí vrcholu věže , počítáme-li na odpad 8 % ?

Příklad 22 : Stožár vysoký 30 metrů je v polovině připevněn osmi lany, jejichž délka je 25 metrů. Konce lan jsou od sebe stejně vzdáleny. Vypočtěte tuto vzdálenost.

6.2. Kužel
(síť, objem, povrch)

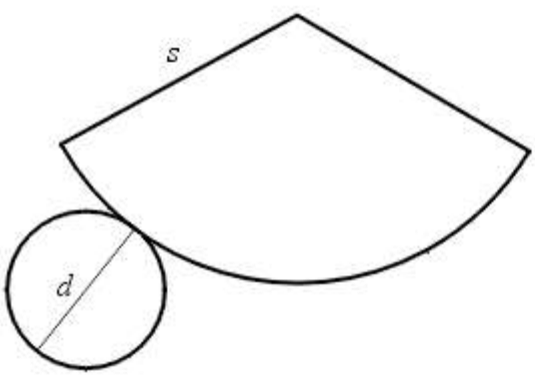
· Vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny.
· Rotací odvěsny vzniká kruhová podstava, rotací přepony plášť kužele.
· Rozvinutý plášť kužele má tvar kruhové výseče, jejímž poloměrem je strana kužele a jejíž oblouk má délku rovnu obvodu podstavy.
· Vzdálenost vrcholu kužele od podstavy je výška kužele.



Povrch kužele: $S = \pi r^2 + \pi rs = \pi r.(r + s)$

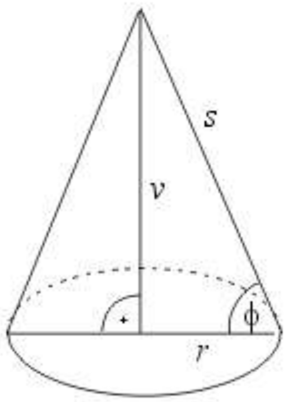
r … poloměr podstavy
s … strana kužele
v … výška kužele

Objem kužele: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$



Síť kužele

Příklad : Je dán kužel o průměru podstavy d = 20 cm a výšce v = 12 cm. Vypočtěte :
a) obsah pláště b) obsah podstavy c) povrch kužele d) objem kužele
e) stranu kužele f) úhel, který svírá strana kužele s rovinou podstavy
g) úhel, který svírají libovolné dvě strany kužele



Řešení :

a) $S_{pl} = \pi .r.s$ s = $\sqrt{r^2 + v^2}$

s = $\sqrt{10^2 + 12^2}$ s = 15,6 cm

S_{pl} = 3,14.10.15,6 **S_{pl} = 489,84 cm^2**

b) $S_p = \pi .r^2$

$S_p = 3{,}14.10^2$ **S_p = 314 cm^2**

c) $S = S_p + S_{pl}$ S = 314 + 489,84 **S = 803,84 cm^2**

d) $V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.v$ V = $\frac{1}{3}.3{,}14.10^2.12$ **V = 1256 cm^3**

e) $s^2 = v^2 + r^2$ $s^2 = 12^2 + 10^2$ **s = 15,62 cm**

f) tg $\phi = \frac{v}{\frac{d}{2}}$ tg $\phi = \frac{12}{\frac{20}{2}}$ tg ϕ = 1,2 ϕ = **50° 10´**

g) β - úhel, který svítají libovolné dvě strany kužele

β = 180° - 2. ϕ β = 180° - 100° 20´ β = **79° 40´**

Příklad 23 : Kužel má objem 462 cm^{3}a poloměr podstavy 7 cm. Vypočtěte : a) výšku
b) stranu kužele c) obsah podstavy d) obsah pláště
e) povrch kužele f) úhel, který svírá strana kužele s rovinou podstavy
g) úhel, který svírají libovolné dvě strany kužele

Příklad 24 : Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky 6 cm a 8 cm, se otáčí kolem své odvěsny.
Vypočtěte : a) objemy takto vzniklých kuželů b) povrchy takto vzniklých kuželů
c) stranu kužele

Příklad 25 : Objem kužele je 307,72 cm^3. Jeho výška má 6 cm. Vypočtěte :
a) průměr podstavy b) stranu kužele c) povrch kužele

Příklad 26 : Objem kužele je 9,42 cm^3. Jeho průměr podstavy je 3 cm. Vypočtěte :
a) výšku kužele b) stranu kužele c) povrch kužele

Příklad 27: Strana rotačního kužele o velikosti 10 cm svírá s rovinou podstavy úhel o velikosti = 67° 30´. Vypočtěte : a) průměr podstavy kužele b) výšku c) objem kužele d) povrch kužele

Příklad 28 : U rotačního kužele platí, že numericky je stejný povrch a objem (bez ohledu na jednotky). Vypočtěte :
a) jaký musí platit vztah mezi veličinami poloměr kužele, stranou kužele a výškou kužele
b) jaký musí platit vztah mezi poloměrem podstavy a stranou kužele

Příklad 29 : Rotační kužel má průměr podstavy 51 cm. Strana kužele svírá s osou kužele úhel 20° 30´. Vypočítejte : a) výšku kužele b) objem kužele c) povrch kužele

Příklad 30 : U rotačního kužele jsme naměřili tyto údaje : poloměr podstavy 4 cm, výška kužele 5 cm, strana kužele 8 cm. Vypočtěte : a) objem kužele b) povrch kužele

Příklad 31 : Rotační kužel má poloměr podstavy 10 cm a stranu kužele 26 cm. Vypočtěte :
a) objem kužele b) povrch kužele

Příklad 32 : Rotační kužel má výšku 12 cm a stranu 15 cm. Vypočtěte : a) objem kužele
b) povrch kužele

Příklad 33 : Je dán pravidelný kvádr s výškou 14 cm a hranou podstavy 7 cm. Ve směru výšky je do hranolu vyvrtán otvor tvaru rotačního kužele s průměrem podstavy 4 cm a výškou 7 cm. Jeho střed podstavy je ve středu podstavy hranolu. Vypočtěte : a) povrch tohoto tělesa
b) objem tohoto tělesa

Příklad 34 : Jak se změní objem rotačního kužele, jestliže :
a) ztrojnásobíte poloměr podstavy b) zmenšíte výšku o polovinu
c) šestkrát zvětšíme průměr podstavy

Příklad 35 : Ve zmrzlinovém kornoutu tvaru kužele o průměru 5 cm je 0,5dl zmrzliny. Vypočtěte : a) hloubku kornoutu b) vnější povrch kornoutu (počítáme s tím, že tloušťka kornoutu je nulová)

Příklad 36 : Do kterého měděného kornoutu tvaru kužele se vejde více vody? První má výšku 20 cm a délku strany 24 cm, druhý má poloměr podstavy 10 cm a výšku 25 cm.

Příklad 37 : Z materiálu o hustotě 3 000kg/m^3 je zhotoven rotační kužel, jehož hmotnost je 2,9 kg. Jeho výška je 15 cm. Vypočtěte : a) poloměr podstavy b) povrch kužele

Příklad 38 : Rotační kužel má povrch 38,06 m^2 a poloměr podstavy 3 m. Vypočtěte :
a) odchylku strany kužele od podstavy
b) odchylku dvou libovolných stran kužele

Příklad 39 : Výška rotačního kužele je 56 cm a odchylka dvou stran kužele je 42°. Vypočtěte : a) průměr podstavy b) stranu kužele c) povrch kužele

Příklad 40 : Nákladní auto uveze 5 m^3 písku. Vejde se na jeho korbu písek, který je složen na hromadě tvaru kužele o průměru podstavy 4 metry a výšce 1 metr ?

Příklad 41 : Poměr plošného obsahu podstavy k plošnému obsahu pláště rotačního kužele je 4 : 9 . Výška kužele je 20 dm. Vypočtěte povrch kužele.

Příklad 42 : Z kruhového plechu o poloměru R vystřihneme čtvrtkruhovou výseč, ze které složíme plášť kužele.Vyjádřete : a) poloměr podstavy kužele b) výšku kužele

6.3. Komolý jehlan
(síť, objem, povrch)

Komolý jehlan vznikne jestliže z jehlanu od jeho vrcholu seřízneme jehlan, který má rovnoběžnou podstavu s původním jehlanem.

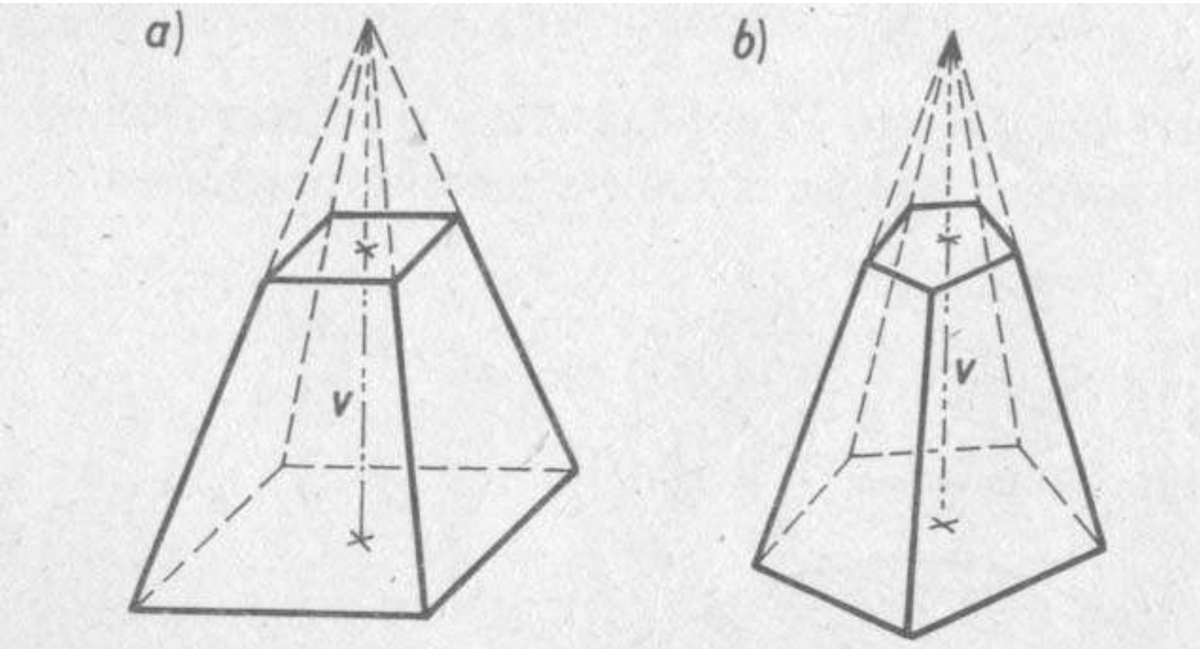
Povrch komolého jehlanu se skládá ze dvou podobných podstav a pláště.
Plášť komolého jehlanu se skládá z bočních stěn, které mají tvar lichoběžníků.

Seříznutím pravidelného jehlanu vznikne pravidelný komolý jehlan, jehož plášť je tvořen rovnoramennými lichoběžníky.

Zpravidla značíme : S_1 - obsah dolní podstavy S_2 – obsah horní postavy
V_1 – objem celého jehlanu V_2 – objem odříznutého jehlanu
M_1 – střed dolní podstavy M_2 – střed horní podstavy
S – povrch komolého jehlanu
V – objem komolého jehlanu

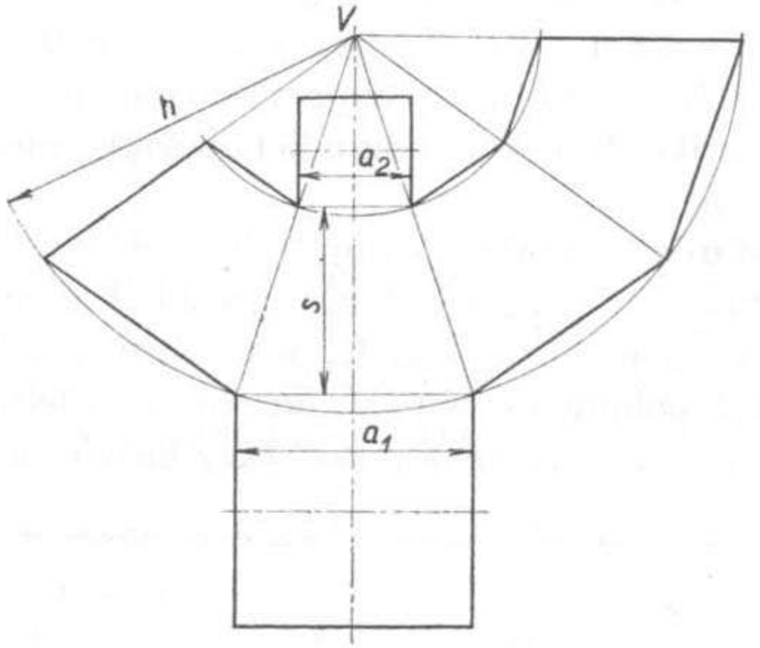
$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}.v.(S_1 + \sqrt{S_1.S_2} + S_2)$$

$$S = S_1 + S_2 + S_{Pl}$$



a) pravidelný čtyřboký komolý jehlan

b) pravidelný pětiboký komolý jehlan



Síť pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu

Příklad : Z pravidelného šestibokého jehlanu s výškou 16 cm a délkou podstavné hrany 4 cm byl odříznut pravidelný šestiboký jehlan s výškou 6 cm. Vypočtěte objem a povrch vzniklého komolého jehlanu ABCDEFGHIJKL, kde GHIJKL je horní podstava.

Řešení : $V = \frac{1}{3}.v.(S_1 + \sqrt{S_1.S_2} + S_2)$

Podstava se složena z šesti rovnostranný trojúhelníků (S⊲)

$S\Delta = \frac{a.\frac{a.\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ $\quad S\Delta = \frac{4^2.\sqrt{3}}{4}$ **$S\Delta = 6{,}93\ cm^2$**

$S_1 = 6.\ S\Delta$ $\quad S_1 = 6.6.93$ **$S_1 = 41{,}58\ cm^2$**

⊲ AM_1V ~ ⊲ GM_2V podle Vuu $\quad \frac{a_1}{v_1} = \frac{a_2}{v_2}$ $\quad \frac{4}{16} = \frac{a_2}{6}$ **$a_2 = 1{,}5\ cm$**

obdobně vypočítáme S_2 $\quad S_2 = \frac{3.1{,}5.\sqrt{3}}{2}$ **$S_2 = 5{,}84\ cm^2$**

výška komolého jehlanu <u>v</u> $\quad v = v_1 - v_2$ $\quad v = 16 - 6$ **v = 10 cm**

$V = \frac{1}{3}.10.(41{,}52 + \sqrt{41{,}52.5{,}84} + 5{,}84)$ **$V = 209{,}77\ cm^3$**

X – střed hrany AB Y – střed hrany GH
v_x – velikost výšky rovnostranného trojúhelníka dolní podstavy
v_y – velikost výšky rovnostranného trojúhelníka horní podstavy

$v_x = \frac{a_1.\sqrt{3}}{2}$ $\quad v_x = \frac{4.\sqrt{3}}{2}$ **$v_x = 3{,}4\ cm$**

$v_y = \frac{a_2.\sqrt{3}}{2}$ $v_y = \frac{1{,}5.\sqrt{3}}{2}$ **v_y = 1,3 cm**

Z – je průsečík rovnoběžky s osou komolého jehlanu procházející bodem Y a úsečky XM_1

$|XZ| = |XM_1| - |YM_2|$ $|XZ| = 3{,}4 - 1{,}3$ **$|XZ|$ = 2,1 cm**

z $\triangleleft$ XZY $\Rightarrow$ $|XZ|^2 + v^2 = v_s^2$ v_s – výška boční stěny

$2{,}1^2 + 10^2 = v_s$ **v_s = 10,22 cm**

$S_{Pl} = 6.\frac{(a_1 + a_2).v_s}{2}$ $S_{Pl} = 6.\frac{(4 + 1{,}5).10{,}22}{2}$ **S_{Pl} = 168,63 cm²**

$S = S_1 + S_2 + S_{Pl}$ $S = 41{,}58 + 5{,}58 + 168{,}63$ **S = 215,79 cm²**

Příklad 43: Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má délky podstav 8 cm a 5 cm a výšku 10cm.
Vypočtěte : a) výšku boční stěny b) velikost boční hrany c) povrch tělesa
d) objem tělesa e) odchylku boční stěny od spodní podstavy
f) odchylku dvou protilehlých pobočných hran
g) odchylku dvou vedlejších pobočných hran

Příklad 44 : Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má délky podstav 10 cm a 5 cm. Plášť má plošný obsah 540 cm². Vypočtěte : a) povrch komolého jehlanu b) objem komolého jehlanu

Příklad 45 : Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má délky podstavných hran 1,8 cm a 1,2 cm a délku boční hrany 4,5 cm. Vypočtěte jeho objem.

Příklad 46 : Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má hranu dolní podstavy dlouhou 14 cm, výšku 9 cm. jeho boční hrany svírají s dolní podstavou úhel 50° . Určete jeho povrch a objem.

6.4. Komolý kužel
(síť, objem, povrch)

Komolý kužel vznikne jestliže z kuželu od jeho vrcholu seřízneme kužel, který má rovnoběžnou podstavu s původním jehlanem.

Povrch komolého kužele se skládá ze dvou kruhů a pláště.
Plášť komolého kužele je výseč mezikruží.
Délka strany komolého kužele je rovna rozdílu délek stran celého a odříznutého kužele
Výška komolého kužele je rovna rozdílu výšek celého kužele a odříznutého kužele.

Zpravidla značíme : S_1 - obsah dolní podstavy S_2 – obsah horní postavy
V_1 – objem celého kužele V_2 – objem odříznutého kužele
M_1 – střed dolní podstavy M_2 – střed horní podstavy
S – povrch komolého kužele
V – objem komolého kužele

Strana komolého kužele $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$

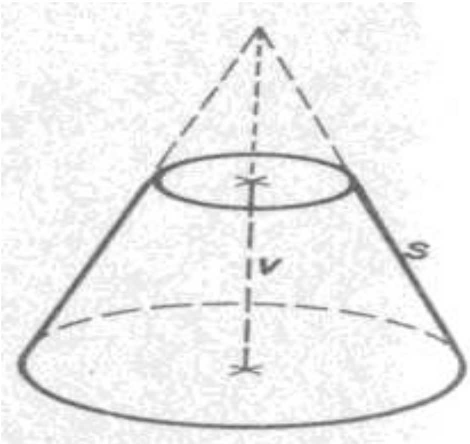
Objem komolého kužele $V = V_1 - V_2$

$$V = \frac{1}{3}.\pi.v.\left(r_1^2 + r_1.r_2 + r_2^2\right)$$

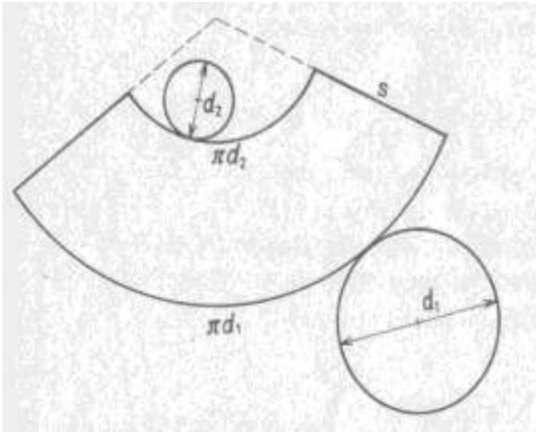
Plášť komolého kužele $S_{Pl} = \pi.s.(r_1 + r_2)$

Povrch kužele $S = S_1 + S_2 + S_{Pl}$

$$S = \pi.\left(r_1^2 + r_2^2 + s.(r_1 + r_2)\right)$$



komolý rotační kužel



povrch komolého kužele

Příklad : Určete obsah pláště v m^2 a objem komolého kužele v litrech. Dolní podstava komolého kužele má poloměr 750 mm, horní podstava má poloměr 450 mm a výška je 1 300 mm.

$$V = \frac{1}{3}.\pi.v.\left(r_1^2 + r_1.r_2 + r_2^2\right)$$ po převodu na decimetry

$$V = \frac{1}{3}.3{,}14.13.\left(7{,}5^2 + 7{,}5.4{,}5 + 4{,}5^2\right)$$ **V = 1 500,14 l**

$S_{Pl} = \pi.s.(r_1 + r_2)$ po převodu na metry

$$S_{Pl} = 3{,}14.\sqrt{(0{,}75 - 0{,}45)^2 + 1{,}3^2}.(0{,}75 + 0{,}45)$$ **S_{Pl} = 5,01 m^2**

Příklad 47 : Rotační komolý kužel má podstavy o poloměru r_1 = 125 mm r_2 = 42,5 cm a výšku 55 cm. Vypočtěte : a) stranu s komolého kužele b) odchylku strany od roviny podstavy c) povrch komolého kužele d) objem komolého kužele

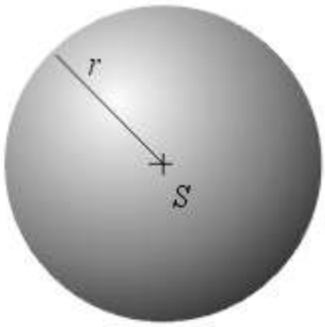
Příklad 48 : Rotační komolý kužel má poloměr podstavy r_1=10 cm r_2 = 7 cm a výšku 4 cm. Vypočtěte :
a) povrch komolého kužele b) objem komolého kužele
c) vyjádřete tento povrch i objem jako násobek čísla π

Příklad 49 : Z plechu se má zhotovit otevřená nádoba tvaru komolého kužele o straně 18 cm. Průměr horní části nádoby má být 30 cm, průměr dna 18 cm. Vypočtěte, kolik cm^2 plechu bude zapotřebí .

Příklad 50 : Vědro na vodu (bez víka) je z plechu a má tvar komolého rotačního kužele. Průměr dna je 24 cm, horního okraje 32 cm a délka strany je 30 cm. Vypočtěte :
a) kolik litrů vody se vejde do vědra
b) jakou hmotnost má prázdné vědro, má-li 1 m^2 plechu hmotnost 10,5 kg

6.5. Koule

· Vznikne rotací kruhu kolem osy kruhu.
· Koule je množina bodů v prostoru, které mají od daného bodu S (střed kruhu) vzdálenost menší nebo rovnu *r* (poloměr kruhu).
· Síť koule neexistuje, nelze ji rozvinout do roviny.



Povrch koule: $S = 4\pi r^2$

r … poloměr koule

Objem koule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Příklad : Je dána koule o průměru 12cm. Vypočtěte : a) objem koule b) povrch koule

$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$	$S = 4.\pi.r^2$
$V = \frac{4}{3}.3{,}14.6^3$	$S = 4.3{,}14 . 6^2$
$V = 904{,}3\ cm^3$	$S = 452{,}16\ cm^2$

Příklad 51 : Povrch koule je 2 462 cm^2. Vypočtěte . a) poloměr koule b) objem koule

Příklad 52 : Objem koule je 113,04 dm^3. Vypočtěte : a) poloměr koule b) povrch koule

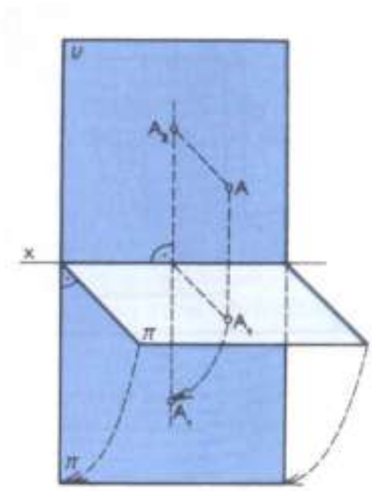
Příklad 53: Do koule o průměru 20 cm je vepsána krychle. Vypočtěte : a) objem koule

b) objem krychle c) kolik % z objemu koule činí objem krychle
d) závisí počet % v otázce c na průměru koule

Příklad 54 : Vypočtěte poloměr koule, která má číselně stejně velký objem i povrch (bez ohledu na jednotky veličin) ?

6.6. Pravoúhlé průměty jehlanu a kužele na dvě k sobě kolmé průmětny

Opakování : **zobrazení bodu v prostoru**



A – bod v prostoru
A_1 – obraz bodu v půdorysně A_2 – obraz bodu v nárysně

Po sklopení půdorysny do nárysny je A_1A_2 kolmá na přímku x.

Vzdálenost A_2 od přímky x je vzdálenost bodu A od půdorysny.
Vzdálenost A_1 od přímky x je vzdálenost bodu A od nárysny.

Leží-li body v půdorysně, pak jejich druhé obrazy leží na přímce x.
Leží-li body v nárysně, pak jejich první obrazy leží na přímce x.

Příklad : Zobrazte na dvě navzájem kolmé průmětny :
a) pravidelný čtyřboký jehlan, který má velikost podstavné hrany a = 4 cm a výšku tělesa 5 cm. Hrana podstavy AB je rovnoběžná s rovinou nárysny
b) pravidelný komolý čtyřboký jehlan, který má velikost podstavné hrany a = 4 cm, výška komolého jehlanu v = 2,5 cm, což je polovina výšky původního jehlanu.

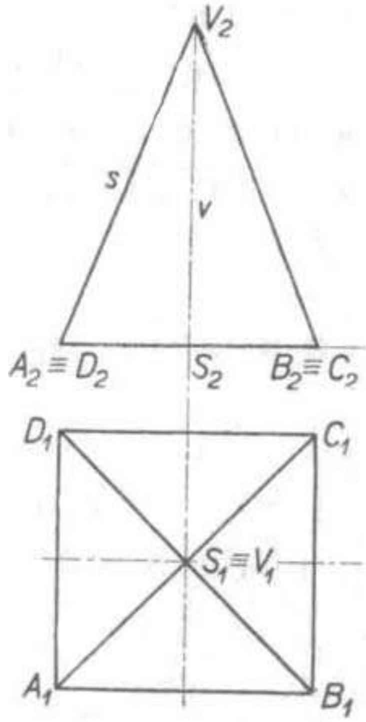
U pravidelného čtyřbokého jehlanu proveďte popis všech bodů.
U pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu proveďte kótování.

Postup řešení bodu a: 1) narýsujeme druhé obrazy bodů podstavy
2) narýsujeme druhý obraz vrcholu tělesa

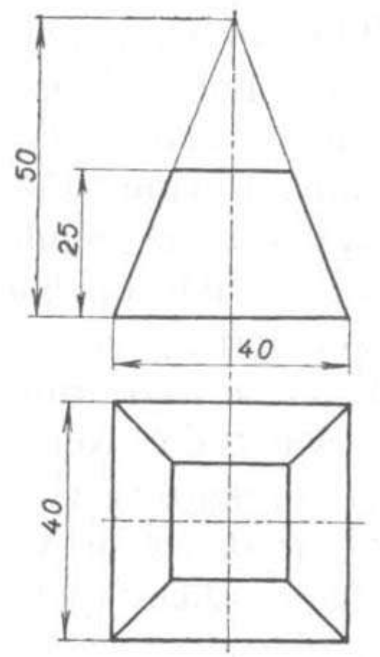
3) vzhledem k tomu, že nebyla zadána vzdálenost žádné hrany podstavy, umístíme libovolně vzdálené body C_1 a D_1 od přímky x,
4) doplníme na čtverec – první obraz podstavy
5) dorýsujeme první obrazy vrcholu tělesa a průsečíku úhlopříček podstavy
6) narýsujeme osy souměrnosti
7) vytáhneme viditelné hrany
8) popíšeme příslušné vrcholy

Postup řešení bodu b : 1) umístíme první obraz dolní podstavy
2) odvodíme druhý průmět dolní podstavy
3) narýsujeme druhý průmět teoretického vrcholu jehlanu
4) narýsujeme druhý průmět horní podstavy
5) odvodíme první průmět horní podstavy
6) narýsujeme osy souměrnosti
7) vytáhneme viditelné hrany
8) kótujeme

a)



b)

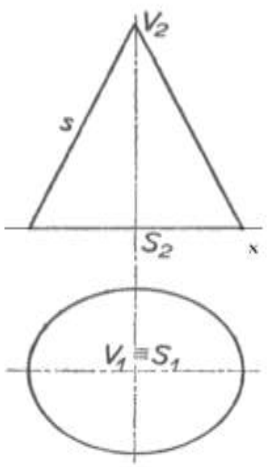


Příklad 56 : Narýsujte na dvě kolmé průmětny pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, který má velikost podstavné hrany a = 5 cm a výšku tělesa v = 6 cm, který je umístěn :
a) podstava leží v půdorysně, AB je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 7 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
b) podstava leží 2 cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AB je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 7 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
c) podstava leží 2 cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AC je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 10 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
d) podstava leží 2 cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AC svírá s nárysnou úhel 30°, bod A je vzdálen od nárysny 10 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
e) podstava leží v nárysně, AB je rovnoběžná s půdorysnou, bod A je vzdálen od půdorysny 7 cm a bod D má vzdálenost od půdorysny menší,

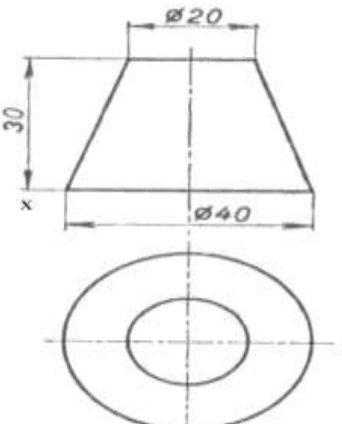
Příklad 57 : Narýsujte na dvě kolmé průmětny pravidelný čtyřboký komolý jehlan ABCDEFGH, který má velikost dolní podstavné hrany a = 5 cm, velikost horní podstavné hrany a = 3 cm a výšku komolého tělesa v = 6 cm, který je umístěn :
a) dolní podstava leží v půdorysně, AB je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 7 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
b) podstava leží 2 cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AB je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 7 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
c) podstava leží 2cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AC je rovnoběžná s nárysnou, bod A je vzdálen od nárysny 10 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
d) podstava leží 2cm nad půdorysnou a je s půdorysnou rovnoběžná, AC svírá s nárysnou úhel 30°, bod A je vzdálen od nárysny 10 cm a bod D má vzdálenost od nárysny menší,
e) podstava leží v nárysně, AB je rovnoběžná s půdorysnou, bod A je vzdálen od půdorysny 7 cm a bod D má vzdálenost od půdorysny menší,

Příklad : Zobrazte na dvě navzájem kolmé průmětny :
a) rotační kužel, který má průměr podstavy d = 4 cm a výšku 5 cm
b) rotační komolý kužel, který má průměr dolní podstavy d_1 = 4 cm, horní podstavy d_2 =2 cm výšku komolého kužele v = 3 cm
U rotačního kužele proveďte popis všech významných bodů.
U komolého rotačního kužele proveďte kótování.

a)



b)



Postup řešení bodu a :
1) narýsujeme osy souměrnosti
2) narýsujeme první průmět kužele
3) odvodíme druhý průmět podstavy a vrcholu
4) popíšeme body

Postup při řešení bodu b :
1) narýsujeme osy souměrnosti
2) narýsujeme první průměty dolní a horní podstavy
3) odvodíme druhé průměty horní a dolní podstavy
4) dorýsujeme druhý průmět komolého kužele
5) kótujeme

Příklad 58 : Narýsujte rotační kužel, který má poloměr podstavy r = 2 cm a výšku v = 3 cm, který je umístěn :
a) kužel leží v půdorysně a má střed podstavy vzdálenost od nárysny 3 cm
b) kužel leží v rovnoběžné rovině s půdorysnou, která je vzdálena 2,5 cm, a má střed podstavy vzdálenost od nárysny 2 cm

c) vrchol kužele leží v půdorysně, střed podstavy je vzdálen od půdorysny 3 cm, od nárysny 4cm, rovina podstavy kužele leží nad půdorysnou v rovnoběžné rovině
d) kužel leží v nárysně a střed podstavy má vzdálenost od půdorysny 5,2 cm

Příklad 59 : Narýsujte komolý rotační kužel, který má poloměr dolní podstavy r_1 = 3,5 cm, poloměr horní podstavy r_2 = 1,5 cm a výšku v = 3 cm, který je umístěn :
a) komolý kužel leží v půdorysně a má střed dolní podstavy vzdálenost od nárysny 5 cm
b) komolý kužel leží v rovnoběžné rovině s půdorysnou, která je vzdálena 2,5 cm, a má střed dolní podstavy vzdálenost od nárysny 5 cm
c) horní podstava komolého kužele leží v půdorysně, střed dolní podstavy je vzdálen od půdorysny 3 cm, od nárysny 4cm, rovina horní podstavy komolého kužele leží nad půdorysnou v rovnoběžné rovině
d) komolý kužel leží v nárysně a střed dolní podstavy má vzdálenost od půdorysny 5,2 cm

Souhrnná cvičení

1) Kolik dm^2 plátna je potřeba na výrobu stanu tvaru jehlanu o čtvercové podstavě se stranou délky a = 2,4 m a výšce 1,6 m, počítáme-li 5% na odpad.

2) Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou a = 60 cm a výškou 400 mm.

3) Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li hrana podstavy 36 cm a stěnová výška 55 cm.

4) Kolik m^2 je potřeba k pokrytí střechy tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou délky 3,2 m a tělesovou výškou 1,2 m ?

5) Střecha rekreační montované chaty má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s délkou podstavné hrany 8 metrů a výškou 0,9 metrů. Kolik čtverečních metrů lepenky je třeba celkem k pokrytí střechy, počítá.li se 10 % na překlady a odpad ?

6) Vypočtěte povrch pravidelného trojbokého jehlanu, který má podstavnou hranu 5 cm a výšku tělesa také 5 cm.

7) Vypočtěte povrch pravidelného jehlanu, jestliže :
a) je čtyřboký s podstavnou hranou 8 cm a výškou stěny 11 cm
b) je trojboký s podstavnou hranou 2 cm a výškou stěny 5 cm
c) je šestiboký s podstavnou hranou 5,2 cm a výškou stěny 7,4 cm
d) je čtyřboký s podstavnou hranou 8 cm a výškou jehlanu 3 cm
e) je šestiboký s podstavnou hranou 5 cm a výškou jehlanu 12 cm.

8) Vypočtěte povrch a objem pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV, je-li dáno :
a) $|AB| = 5$cm, výška boční stěny v_s = 5 cm
b) $|AB| = 4$ cm, výška jehlanu v = 1 cm
c) $|AB| = 4$ cm, $|AV|$ = 6cm
d) $|AB| = 6$ cm, O_{ABV} = 16 cm
e) $|AB| = 6$ cm, $O_{ACV} = 36.\sqrt{2}$
f) $|AB| = 5$ cm, S_{ABV} = 16,25 cm^2
g) $|AB| = 6$ cm, S_{Pl} = 60 cm^2

9) Vypočtěte objem pravidelného trojbokého jehlanu ABCV, je-li dáno :

a) $|AB|$ = 8 cm, v = 2cm
b) O_{ABC} = 12 cm, v = 6 cm
c) $|AB|$ = 2 cm, $|Av|$ = $\sqrt{\frac{13}{3}}$ cm,
d) S_P = $\sqrt{3}$ cm^2 , $|AV| = \frac{5.\sqrt{3}}{6}$ cm
e) S_P = 27.$\sqrt{3}$ cm^2, v_s = 5 cm

10 Vypočtěte povrch pravidelného trojbokého jehlanu ABCV, je-li dáno :
a) $|AB|$ = 5 cm, v_s = 6 cm
b) $|AB|$ = 6 cm, v = $\sqrt{13}$ cm
c) $|AB|$ = 10 cm, $|AV|$ = 13 cm,
d) S_{ABC} = 4.$\sqrt{3}$ cm^2, $|AV|$ = 2,9 cm
e) v = 22.$\sqrt{13}$ cm, $|AV|$ = 10 cm

11) Vypočtěte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu ABCDEFV, je-li dáno :
a) $|AB|$ = 4 cm, v_s = 4 cm
b) $S_P{}'$= 128.$\sqrt{3}$ cm^2 , v_s = 17 cm
c) S_{ABV} = 85.$\sqrt{3}$ cm^2, v_s = 17 cm
d) $|AV|$ = 2,5.$\sqrt{2}$ cm, S_P =18.$\sqrt{3}$ cm^2
e) S_{ADV} = 12 cm^2 , S_P = 24.$\sqrt{3}$ cm^2

12) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan S = 384 cm^2 a S_p = 144 cm^2. Vypočtěte jeho výšku.

13) Rotační kužel má objem $\frac{20.\pi}{3}$ cm^3 a výšku 5 cm. Vypočtěte jeho povrch.

14) Vypočtěte objem a povrch rotačního kužele, je-li S_P = π cm^2 a S_{Pl} = $\pi.\sqrt{5}$ cm^2.

15) Vypočtěte objem a povrch kužele, je-li :
a) S_P = 4.π cm^2, v = 2.$\sqrt{3}$ cm
b) S_p = 9. π cm^2, s = 3.$\sqrt{3}$cm,
c) s = 2.$\sqrt{10}$ cm, S_{Pl} = 4. π . $\sqrt{10}$ cm^2,
d) d = 2.$\sqrt{5}$ cm, S_{Pl} = π . $\sqrt{55}$ cm^2,
e) O_p = 4. π . $\sqrt{5}$cm, S_{Pl} = 10.π . $\sqrt{5}$cm^2,
f) S_R = 3 cm^2, v = 2 cm, S_R – obsah osového řezu kužele
g) S_R = 15 cm^2, r = 2,5 cm
h) S_R = 4,8 cm^2, S_P = 2,56. π cm^2
i) S_R = 16,4 cm^2, O_P = 8. π cm
j) S_R = 16.$\sqrt{3}$ cm^2 , osový řez je rovnostranný trojúhelník
k) S_P : S_{Pl} = 1 : 2, r = 1cm
l) S_R : S_P = 1 , r = 1 cm
m) S_R : S_{Pl} = 1 : 2. π , v = 1 cm
n) S_P : S = 1 : (1 + $\sqrt{2}$), r = 1 cm

o) S_{Pl} : S = 2 . 3, r = 1 cm

16) Vypočtěte stranu rotačního kužele, je-li objem kužele 11,76. π cm^3 a poloměr podstavy 2,8 cm

17) Vypočtěte : a) poloměr podstavy kužele, je-li V = 42,24. π cm^3, v = 5,5 cm,
b) výšku kužele, je-li V = 13,44. π cm^3, d = 4,8 cm,
c) stranu kužele, je-li S = 66,81. π cm^2, r = 5,1 cm
d) výšku kužele, je-li S = 72,6. π cm^2, r = 6 cm
e) stranu kužele, je-li V = 1,68. π cm^3, v = 3,5 cm.

18) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV s podstavnou hranou a a výškou v. Do čtverce ABCD je vepsán kruh, který tvoří podstavu kužele. Vypočtěte, kolikrát je objem kužele větší než objem jehlanu, jestliže se výška kužele rovná dvojnásobku výšky jehlanu.

19) Vypočtěte objem a povrch koule, je-li :
a) poloměr koule 2 cm
b) průměr koule 3 cm
c) obsah řezu, který prochází středem koule, se rovná 9. π cm^2
d) obvod řezu, který prochází středem koule, se rovná 2. π cm
e) povrch koule v cm^2 se číselně rovná objemu koule v cm^3

20) Vypočtěte poloměr koule, je-li :
a) objem koule 36. π cm^3
b) povrch koule 100. π cm^2
c) koule je opsána krychli o hraně délky 3. $\sqrt{3}$ cm
d) koule vepsána do krychle o objemu 8 cm^3
e) poloměr koule v cm se číselně rovná povrchu v cm^2

21) Vypočtěte poloměr koule, jestliže kruh, který vznikne jako průnik koule a roviny, která má od středu koule vzdálenost rovnající se polovině poloměru, má obsah 12. π cm^2.

22) Určete objem dutého tělesa, které má tvar vrstvy mezi dvěma soustřednými koulemi. Poloměr vnější koule (kulové plochy) je 11 cm, tloušťka tělesa je 3 cm.

23) Určete povrch pravidelného komolého jehlanu, je-li a_1 = 24 cm, a_2 = 14 cm a délka boční hrany měří 13 cm.

24 Vypočtěte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, je-li dáno :
a) hrany podstav 380 mm, 16 cm, výška tělesa 2 dm,
b) hrany podstav 48 cm, 2,8 dm , výška boční stěny 26 cm,
c) hrany podstav 56 mm, 3,4 cm, délka boční hrany 35 mm,
d) hrany podstav 3 cm, 24 mm, boční hrana svírá s podstavou úhel 60º,
e) hrany podstav 2,6 m, 150 mm, výška boční stěny svírá úhel s podstavou 73º,
f) hrana horní podstavy 10cm, výška boční stěny 2,5 dm, výška boční stěny svírá úhel s podstavou 55º,
g) hrana dolní podstavy 60 mm, výška boční stěny1,7 cm, výška tělesa 1,5 cm

25) Vypočtěte výšku pravidelného n- bokého jehlanu, který má objem 3,5 litru a délky podstavných hran 25 cm, 14 cm :
a) n = 3 b) n = 4 c) n = 6

26) V komolém kuželu označíme α velikost úhlu, který svírá strana kužele s podstavou. Vypočtěte jeho povrch a objem, platí-li :

a) r_1 = 26 cm, d_2 = 2,8 dm, v = 14 cm
b) d_1 = 3,2 dm, d_2 = 12 cm, s 14,5 cm (strana kužele)
c) d_1 = 9 mm, r_2 = 3,6 cm, α = 52º
d) r_1 = 4,3 dm, v = 12 cm, α = 78º,

27) Komolý kužel má objem 2 538 580 cm^3, poloměr dolní podstavy 25 dm, poloměr horní podstavy14 dm. Vypočtěte obsah pláště.

28) Určete výšku válce, který má stejný povrch jako komolý kužel s poloměry podstav 12 cm, 6 cm a výškou 8 cm. Poloměr podstavy válce je roven delšímu z poloměrů podstav komolého kužele.

Výsledky příkladů:

1 a) 100 cm^2 , **b)** 172 cm^2, **c)** 272 cm^2, **d)** 233,3 cm^3 ,
2 a) 312 cm^2, **b)** 739,2 cm^2, **c)** 1 051,2 cm^2, **d)** 1 872 cm^3 ,
3 a) 4,5 dm , **b)** 4,92 dm , **c)** 53,2 dm^2,
4 a) 180 cm^2, **b)** 571,92 cm^2, **c)** 751,92 cm^2,
5) 54,9 cm ,
6 a) 31,5 m^2, **b)** 5,6 m ,
7) 521,28 cm^3 ,
8) 27,46 m^2,
9 a) 284,2 cm^2, **b)** 266 cm^3 ,
10 a) 67°20´ , **b)** 10,2 cm , **c)** 122,4 cm^3 ,
11 a) 7,5 cm , **b)** 163 cm^2 , **c)** 112 cm^3 ,
12) 224,12 m^2,
13 a) 21,2 dm , **b)** 10 dm ,
14 a) 772 dm^2, **b)** 1 195 dm^3 ,
15) 256 gramů,
16) 9 dm ,
17) 1 625 .- Kč
18) 5,2 litru,
19) bude potřebovat dvě plechovky za 240.- Kč ,
20 a) 1,5 m^3 , **b)** 8,4 m^2,
21) 25 m^2,
22) 15,3 m ,
23 a) 9 cm , **b)** 11,4 cm , **c)** 153,86 cm^2, **d)** 250,6 cm^2, **e)** 404,46 cm^2, **f)** 52°17´ , **g)** 75°´
24 a) 402 cm^3 , 301 cm^3 , **b)** 453 cm^2, 301cm^2, **c)** 10 cm ,
25 a) 14 cm , **b)** 9,22 cm , **c)** 113,54 cm^2,
26 a) 4 cm , **b)** 4,27 cm , **c)** 8,655 cm^2,
27 a) 7,6 cm , **b)** 9,24 cm , **c)** 142 cm^3 , **d)** 166cm^2,
28 a) $r + s = \frac{1}{3}v$, **b)** 3r + 3s – v = 0 ,
29 a) 68,2 cm , **b)** 46 442 cm^3 , **c)** 7 870,88 cm^2,
30) takový kužel nemůže existovat, protože neplatí vztah $v^2 + r^2 = s^2$,
31 a) 1 356 dm^3 , **b)** 1 017 dm^2,
32 a) 1 017 cm^3 , **b)** 678,2 cm^2,

33 a) 522 cm^2, **b)** 656,69 cm^3 ,
34 a) bude 9 krát větší , **b)** bude poloviční , **c)** bude 36 krát větší ,
35 a) 7,6 cm , **b)** 62,8 cm^2,
36) do prvního (3 686,2cm^3 , 2 616,7 cm^3) ,
37 a) 7,8 cm , **b)** 611 cm^2,
38 a) 42° , **b)** 96° ,
39 a) 42,99 cm , **b)** 59,98 cm , **c)** 5 499 cm^2,
40) ano, protože písku je 4,2 m^3 ,
41) 1 005 dm^2,
42) $r_1 = 0,25.R$ $v_1 = 0,25.\sqrt{15}.R = 0,963.R$
43 a) 10,1 cm , **b)** 10,2 cm , **c)** 351 cm^2 , **d)** 430 cm^3 , **e)** 81° 27′ , **f)** 35,6° ,
g) 16°50′ ,
44) 665 cm^2 , 1 039,8 cm^3 ,
45) 9,735 cm^3 ,
46) 757,39 cm^3 , 568,65 cm^2 ,
47 a) 62,64 cm, **b)** 118°36′ , **c)** 169,81 dm^2 , **d)** 1,43 m^3 ,
48 a) 735 cm^2, **b)** 917 cm^3, **c)** 234π , **d)** 292π ,
49) 1 612 cm^2 ,
50 a) asi 18 litrů, **b)** 3,25 kg ,
51 a) 14 cm , **b)** 11 488 cm^3 ,
52 a) 3 dm , **b)** 113,04 dm^3 ,
53 a) 4 187 cm^3 , **b)** 1 538 cm^3 , **c)** 36,7% , **d)** nezávisí na průměru $V_{koule} = \frac{\pi d^3}{6}$

$$V_{krychle} = \frac{d^3\sqrt{3}}{9} \quad x = \frac{d^3\sqrt{3}}{9} : \frac{\pi d^3}{600} = \frac{200\sqrt{3}}{3\pi} = 36,7\ \%\ ,$$

54) 3 cm ,

Souhrnná cvičení

1) 1 612,8 dm^2 , bez podlážky 1 008 dm^2;
2) 9 600 cm^2,
3) 5 256 cm^2 ,
4) 12,8 m^2 ,
5) 72,16 m^2 ,
6) 49,83 cm^2 ,
7 a) 240 cm^2 , **b)** 16,7 cm^2 , **c)** 185,6 cm^2 , **d)** 144 cm^2 , **e)** 259,9 cm^2 ,
8 a) 36,08 cm^3 , 75 cm^2 , **b)** 5,33 cm^3 , 33,92 cm^2 , **c)** 28,3 cm^3 , 61,1 cm^2, **d)** 31,8 cm^3 ,
84 cm^2 , **e)** 264,6 cm^3 , 303 cm^2 , **f)** 50 cm^3 , 90 cm^2 , **g)** 48 cm^3 , 96 cm^2 ,
9 a) 18,45 cm^3 , **b)** 13,84 cm^3 , **c)** 1 cm^3 , **d)** 0,5 cm^3 , **e)** 62,28 cm^3 ,
10 a) 55,81 cm^2 , **b)** 51,57 cm^2 , **c)** 223,25 cm^2 , **d)** 19,52 cm^2 , **e)** 18 257,24 cm^2 ,
11 a) 17,7 cm^3 , 89,52 cm^2 , **b)** 1 107 cm^3 , 692 cm^2 , **c)** 2 076 cm^3 , 1 660,8 cm^2 ,
d) 7,35 cm^3 , 63,2 cm^2 , **e)**67,9 cm^3 , 113,6 cm^2 ,
12) 8 cm,
13) 46,41 cm^2 ,
14) 10,17 cm^2 , 2,09 cm^3 ,
15 a) 14,5 cm^3 , 37,7 cm^2 , **b)** 39,99 cm^3 , 77,25 cm^2 , **c)** 25,12 cm^3 , 52,28 cm^2 ,
d) 12,9 cm^3 , 39 cm^2 , **e)** 46,9 cm^3 , 133,14 cm^2 , **f)** 4,71 cm^3 , 18,84 cm^2 ,
g) 39,25 cm^3 , 70,65 cm^2 , **h)** 8,07 cm^3 , 25,12 cm^2 , **i)** 68,67 cm^3 , 122,18 cm^2 ,
j) 116,2 cm^3 , 150,72 cm^2 , **k)** 1,81 cm^3 , 9,42 cm^2 , **l)** 3,29 cm^3 , 13,5 cm^2 ,
m) 3,14 cm^3 , 20,3 cm^2 , **n)** 1,05 cm^3 , 7,6 cm^2 , **o)** 1,8 cm^3 , 9,42 cm^2 ,
16) 5,3 cm ,

17 a) 4,8 cm, **b)** 7 cm **, c)** 8 cm , **d)** 1,1 cm, **e)** 3,7 cm,

18) $\frac{\pi}{2}$ krát, tedy asi 1,57 krát větší než objem jehlanu,

19 a) 33,49 cm^3 , 50,24 cm^2 , **b)** 14,1 cm^3 , 28,3 cm^2 , **c)** 113,04 cm^3 , 113,04 cm^2 ,
d) 4,19 cm^3 , 12,56 cm^2 , **e)** 113,04 cm^3 , 113, 04 cm^2 ,

20 a) 3 cm**, b)** 5 cm, **c)** 4,5 cm , **d)** 1 cm, **e)** 0,08 cm,

21) 4 cm ,

22) 3 428,88 cm^3 ,

23) 1 017,89 cm^2 ,

24 a) 4 165,64 cm^2 , 15 386,67 cm^3 , **b)** 7 040 cm^2 , 35 456 cm^3 , **c)** 102,73 cm^2 ,
64,75 cm^3 , **d)** 23,34 cm^2 , 5,36 cm^3 , **e)** 2 443,42 dm^2 , 7 741,7 dm^3 ,
f) 4 030,14 cm^2 , 13 536,89 cm^3 , **g)** 90,72 cm^2 , 40,88cm^3 ,

25 a) 20,73 cm, **b)** 8,97 cm, **c)** 3,46 cm ,

26 a) 5 054,14cm^2 , 18111,52cm^3 , **b)** 1 918,54cm^2 , 4 264,12cm^3 , **c)** 172,4 cm^2 ,
94,88 cm^3 , **d)** 14 150,82 cm^2 , 65620,38 cm^3

27) 137 069,48 cm^2 ,

28) S = 1 130,4 cm^2 , v = 3 cm,