

## 7. Finanční matematika

### 7.1. Jistina, úroková míra, úroková doba, úrok

Základní pojmy :

**Dlužník** – osoba nebo instituce, které si peníze půjčuje.

**Věřitel** – osoba nebo instituce, která peníze půjčuje.

**Jistina** – částka, která byla půjčena a budeme ji označovat  $J_0$ .

$$J_1 \text{ částka po roce } J_1 = J_0 + \acute{u}$$

$$J_2 \text{ částka po dvou letech } J_2 = J_1 + \acute{u}_1 \quad \text{a podobně}$$

**Úroková míra** – udává výši úroku za určité období v procentech, označujeme ji  $p$ .

**Úroková sazba** – vyjádření úrokové míry desetinným číslem, které označujeme  $i$ .

$$i = \frac{p}{100}$$

Jestliže úroková míra  $p = 7\%$ , potom úroková sazba  $i = 0,07$ .

**Úrok – úroková hodnota** – je částka v Kč, kterou obdrží věřitel po uplynutí určité doby (úrokovací doby), značíme  $\acute{u}$ .

**Úroková doba** – je časový úsek, po kterou je jistina půjčena nebo uložena v peněžním ústavu, označujeme ji  $t$ . Udává se v letech, měsících a dnech.

**Úrokovací období** – je časový úsek, na který je vázána úroková míra. Zpravidla rok, ale může být např. pololetí, čtvrtletí, měsíc.

Základní vztahy :

Úrok za jedno úrokovací období

$$\acute{u}_1 = J_0 \cdot i$$

Úrok za úrokovací dobu  $t$

$$\acute{u} = \acute{u}_1 \cdot t$$

$$\acute{u} = J_0 \cdot i \cdot t$$

Použijeme-li vztah  $i = \frac{p}{100}$

$$\acute{u} = \frac{J_0 \cdot p \cdot t}{100}$$

### 7.2. Jednoduché úrokování

**Úrokovací doba bude kratší nebo rovna úrokovacímu období.**

**Příklad :** Určete výši úroku, kterou požaduje banka za půjčení částky 12 000 Kč na šest měsíců při úrokové míře 13 % za rok

Zápis :  $J_0 = 12\,000$  Kč  $p = 13\%$   $t = 0,5$  roku

Řešení : a) 100 % ..... 12 000    13 % .....  $x$      $x = 1\,560$      $\acute{u} = 1\,560 \cdot 0,5 = \mathbf{780.-\text{ Kč}}$

$$\text{b) } \acute{u} = \frac{J_0 \cdot p \cdot t}{100} \quad \acute{u} = \frac{12000 \cdot 13 \cdot 0,5}{100} = 60 \cdot 13 = 780 \quad \acute{u} = \mathbf{780.-\text{ Kč}}$$

Úrok činí 780.- Kč.

**Příklad 1 :** Jak velký úrok musí splatit podnikatel, který si půjčil na 9 měsíců částku 37 000.- Kč při

14,5 % za rok ?

**Příklad 2 :** Podnikatel J. K. si půjčil v bance částku 200 000 Kč na doplnění prostředků k nákupu sezónních zásob. Ve smlouvě s bankou se dohodl, že půjčku splatí za půl roku a úrok bude činit 14 % ročně.

**Příklad :** Podnikatel uložil jako termínovaný vklad na půl roku částku 80 000.- Kč při úrokové míře 7 % za půl roku. Určete úrok, který získá po uplynutí této doby.

Zápis :  $J_0 = 80\,000.- \text{ Kč}$     $i = 0,07$     $t = 1$

$ú = J_0 \cdot i \cdot t$

$ú = 80\,000 \cdot 0,07 \cdot 1$

**$ú = 5\,600.- \text{ Kč}$**

Podnikatel získal na úrocích 5 600.- Kč

**Poznámka :** při výpočtu jsme dosadili  $t = 1$ , protože úroková doba půl roku byla rovna úrokovacímu období.

**Zapamatujte si :** Při výpočtu úroku musíme za  $t$  dosadit vždy zlomek z daného úrokovacího období.

Například za 5 měsíců při ročním úrokovacím období  $t = \frac{5}{12}$

za 5 měsíců při půlročním úrokovacím období  $t = \frac{5}{6}$

**Příklad 3 :** Obchodník si vzal na osm měsíců úvěr 100 000.-Kč při roční úrokové míře 11%. Kolik korun bude muset obchodník bance vrátit ?

**Příklad 4 :** Vypočítejte úrok, který vynese jistina 48 000.- Kč při roční úrokové míře 5 % za tři měsíce.

**Příklad 5 :** Tetička darovala Pavlovi k narozeninám spořitelni knížku s vkladem 13 000.- Kč uložených na roční úrok 11 %. Kolik Kč bude mít Pavel na knížce za půl roku ?

V peněžních ústavech úrok narůstá nejen po letech, ale i po měsících a dokonce i po dnech.

Pro tyto výpočty má úroková doba 360 dnů a tedy úroková doba 360 dnů.

Ze dvou dnů – den vložení a den výběru – počítáme vždy jen jeden den.

**Příklad :** 14. března 2002 si pan Novák půjčil 20 000.- Kč na roční 14 % úrok. Kolik Kč bude muset zaplatit 25. srpna 2002 ?

Řešení : 1) určení počtu dní půjčky

březen : 17 dní ( počítáme den půjčky )

duben, květen, červen, červenec ....  $4 \cdot 30 = 120$  dní

srpen : 24 dní ( nepočítáme den zaplacení )

$17 + 120 + 24 = 161$  dní

Jiný způsob :

$t$  – počet dnů úrokovací doby

$d_1$  – den vkladu

$d_2$  – den splátky

$m_1$  – měsíc vkladu

$m_2$  – měsíc splátky

$t = 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$

VÝPOČET :  $t = 30 \cdot (8 - 3) + (25 - 14)$   $t = 30 \cdot 5 + 11$

**$t = 161$  dní**

2) zápis  $J_0 = 20\,000.- \text{ Kč}$     $i = 0,14$

$t = \frac{161}{360}$

- 3) výpočet úroku  $ú = J_0 \cdot i \cdot t$   $ú = 20\,000 \cdot 0,14 \cdot \frac{161}{360}$   **$ú = 1\,252,22$  Kč**
- 4) výpočet částky, kterou bude pan Novák platit  $x = 20\,000 + 1\,252,22$   
 **$x = 21\,252,22$  Kč**
- 5) odpověď Pan Novák 25. srpna 2002 zaplatí za půjčku 21 252,22 Kč.

**Příklad 6 :** Vypočítejte výši úroku pana X.Y., který měl od 12. dubna do 18. října 2002 půjčku v bance na roční 8 % úrok ve výši 27 000.- Kč.

**Příklad 7 :** Vypočtete 9 % roční úrok z částky 78 400 Kč za dobu od 2. května do 30. července 2000.

**Příklad 8 :** Podnikatel si půjčil 16. ledna 1999 60 000.- Kč, 21. února 1999 40 000.- Kč a 8. března 1999 30 000.- Kč na roční 12 % úrok. Kolik Kč bude muset zaplatit 31. prosince 1999 ?

**Příklad :** Pan Adam splatil úvěr a úroky částkou 445 000.- Kč. Půjčka byla splacena po 270 dnech a to při ročním úroku 15 %. Jak velký úvěr si vzal pan Adam ?

$$\text{Zápis : } J_1 = 445\,000.- \text{ Kč} \quad t = \frac{270}{360} \quad i = 0,15 \quad \text{neznámá } J_0$$

$$ú = J_0 \cdot i \cdot t \quad J_1 = J_0 + ú \quad J_1 = J_0 + J_0 \cdot i \cdot t = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$J_1 = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$445\,000 = J_0 \cdot \left(1 + 0,15 \cdot \frac{270}{360}\right) \quad \mathbf{J_0 = 400\,000.- \text{ Kč}}$$

Pan Adam si vzal půjčku ve výši 400 000.- Kč.

**Příklad 9 :** Na vkladní knížce, která byla zřízena 4. května 2000 na roční úrok 9 % bylo 31. prosince částka 16 948. Kolik byla původní jistina ?

**Příklad 10 :** Půjčka i s ročními úroky ve výši 12 % byla splacena po 327 dnech. Kolik činily vlastní úroky ?

**Příklad 11 :** Pan Novinka si půjčil 21. ledna 1999 180 000.- Kč při roční úrokové míře 12 %. Který den musel zaplatit dluh, jestliže s bankou se vyrovnal částkou 195 000.- Kč.

**Příklad 12 :** Paní Mrázková si půjčila 1. března 2000 částku 400 000.- Kč v bance na 12 % roční úvěr. 1. srpna 2000 splatila 50 000.- Kč a 1. října dalších 50 000.- Kč. Kolik dlužila bance 1. ledna 2001 ?

## 7.3. Složené úrokování

Složené úrokování je takové úrokování, kdy úroková doba je rovna aspoň dvěma celým úrokovacím obdobím.

Nejdříve vypočítáme příklad na složené úrokování za pomoci našich znalostí jednoduchého úrokování.

**Příklad :** Pan Pavel si uložil na vkladní knížku do banky částku 12 000.- Kč s roční úrokovou mírou ve výši 5 %. Kolik Kč bude mít na knížce za tři roky ?

Řešení :

1. fáze – kolik bude mít na knížce po roce

$$J_1 = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$J_1 = 12\,000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 1)$$

$$J_1 = 12\,600.- \text{ Kč}$$

2. fáze – kolik bude mít na knížce po dvou letech

$$J_2 = J_1 \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$J_2 = 12\,600 \cdot (1 + 0,05 \cdot 1)$$

$$J_2 = 13\,230.- \text{ Kč}$$

3. fáze – kolik bude mít na knížce po třech letech

$$J_3 = J_2 \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$J_3 = 13\,230 \cdot (1 + 0,05 \cdot 1)$$

$$J_3 = 13\,891.50 \text{ Kč}$$

4. fáze – odpověď

Za tři roky bude mít na knížce 13 891.50 Kč.

Pro výpočty tohoto typu můžeme používat vzorce :  $J_n = J_0 \cdot r^n$ ,kde  $J_0$  je počáteční jistina $J_n$  je jistina po  $n$  úrokových obdobích ( zpravidla letech ) $n$  je počet let $r$  je úročitel, kde  $r = 1 + i \cdot t$ 

$$J_n = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)^n$$

Daný příklad tedy můžeme vypočítat :

$$J_n = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)^n$$

$$J_3 = 12\,000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 1)$$

$$J_3 = 13\,891,50 \text{ Kč}$$

**Příklad 13** : Na kolik Kč vzroste částka 40 000 za 15 let při roční úrokové míře 5 % ?**Příklad 14** : Jakou částku vložil pan Novák do banky při roční úrokové míře 6 %, jestliže po třech letech mu banka vyplatila 5 955,08 Kč ?

V životě však není tak jednoduché. Banky, stejně jako ostatní podnikatelé, platí daně státu. Proto i úroky občanů banka musí zdanit.

Proto náš vzorec  $J_n = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)^n$  musíme ještě zkorigovat o zaplacení daně .Například při 15 % dani z úroků platí  $J_n^* = J_0 \cdot (0,15 + 0,85 \cdot r)^n$ , kde  $r = 1 + i \cdot t$ Při 12 % dani z úroků platí  $J_n^* = J_0 \cdot (0,12 + 0,88 \cdot r)^n$ , kde  $r = 1 + i \cdot t$ **Příklad 15** : Vypočítejte jakou částku vyplatí banka klientovi, který si v bance uložil 68 000,- Kč na dva roky při roční úrokové míře 14,5 %, jestliže úrok se daní 15 % daní z příjmu ?**Příklad 16** : Jakou částku musel klient vložit do banky, která při roční úrokové míře 6 %, za 8 let po odečtení daní 15 % vyplatil částku 26 797,48 Kč ?

## 7.4. Kombinované úrokování

Vzhledem k tomu, že v bankovníctví se nepůjčuje jenom na celá úroková období, ale dosti často na určitý počet let a dní, používáme metodu kombinovaného úrokování.

**Příklad :** 10. dubna 1998 jsme si uložil v bance částku 50 450,- Kč na roční 11 % úrokovou míru. Kolik Kč budu mít na kontě 26. září 2002, jestliže :

- a) nebudu platit daň z příjmů  
b) budu platit 15 % daň z příjmů.

Řešení a) :

1 fáze – výpočet výše konta 31.12.1998

$$t = 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$$

$$t = 30 \cdot (12 - 4) + (31 - 10) \quad t = 30 \cdot 8 + 21 \quad t = 261 \text{ dní}$$

$$J_0 = 50\,450,- \text{ Kč} \quad i = 0,11 \quad t = \frac{261}{360}$$

$$\acute{u} = J_0 \cdot i \cdot t \quad \acute{u}_1 = 50\,450 \cdot 0,11 \cdot \frac{261}{360} \quad \acute{u}_1 = 4\,023,39 \text{ Kč}$$

$$J_1 - \text{stav konta} \quad J_1 = 50\,450 + 4\,023,39 \quad J_1 = 54\,473,39 \text{ Kč}$$

2. fáze – výpočet výše konta 31.12.2001

$$\text{obecný vzorec upravíme } J_n = J_0 \cdot (1 + i \cdot t)^n \quad \text{na} \quad J_4 = J_1 \cdot (1 + i \cdot t)^3$$

$$J_4 = 54\,473,39 \cdot (1 + 0,11 \cdot 1)^3 \quad J_4 = 74\,499,50 \text{ Kč}$$

3. fáze – výpočet výše konta 26.9.2002

$$t = 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$$

$$t = 30 \cdot (9 - 1) + (26 - 1) \quad t = 30 \cdot 8 + 25 \quad t = 265 \text{ dní}$$

$$J_4 = 74\,499,50 \text{ Kč} \quad i = 0,11 \quad t = \frac{265}{360}$$

$$\acute{u} = J_0 \cdot i \cdot t \quad \acute{u}_5 = 74\,499,50 \cdot 0,11 \cdot \frac{265}{360} \quad \acute{u}_5 = 6\,009,63 \text{ Kč}$$

$$J_5 - \text{stav konta} \quad J_5 = J_4 + \acute{u}_5$$

$$J_5 = 74\,499,50 + 6\,009,63$$

$$J_5 = 80\,509,13 \text{ Kč}$$

Řešení b) : budeme používat údaje vypočítané v bodě a

1. fáze – výpočet výše konta 31.12.1998

$$\acute{u}_1 = 4\,023,39 \text{ Kč}$$

$$\acute{u}_1^* = 0,85 \cdot \acute{u}_1 \quad \acute{u}_1^* = 0,85 \cdot 4\,023,39 \quad \acute{u}_1^* = 3\,419,88 \text{ Kč}$$

$$J_1 = 50\,450 + 3\,419,88 \quad J_1 = 53\,869,88 \text{ Kč}$$

2. fáze – výpočet výše konta 31.12.2001

obecný vzorec  $J_n^* = J_0 \cdot (0,15 + 0,85 \cdot r)^n$ , kde  $r = 1 + i \cdot t$  upravíme na

$$J_4^* = J_1 \cdot (0,15 + 0,85 \cdot r)^3, \text{ kde } r = 1 + i \cdot t$$

$$J_4^* = 53\,869,88 \cdot (0,15 + 0,85 \cdot 1,11)^3 \quad J_4^* = 70\,437,25 \text{ Kč}$$

3. fáze – výpočet výše konta 26.9.2002

$$\begin{aligned} \dot{u}_5^* &= 0,85 \cdot \dot{u} = 0,85 \cdot J_0 \cdot i \cdot t & \dot{u}_5^* &= 0,85 \cdot 70\,437,25 \cdot 0,11 \cdot \frac{264}{360} \\ J_5^* &= J_4^* + \dot{u}_5^* & J_5^* &= 70\,437,25 + 4\,829,65 & \dot{u}_5^* &= 4\,829,65 \text{ Kč} \\ & & & & J_5^* &= 75\,266,90 \text{ Kč} \end{aligned}$$

## 4. fáze – odpověď

Jestliže nebudu platit daň z příjmů, tak budu mít na kontě 80 509,13 Kč, budu-li platit daň, tak budu mít na kontě 75 266,90 Kč.

**Příklad 17** : Pan Novotný uložil 17. května 1993 v bance částku 40 320,- Kč na roční 12 % úrokovací míru, které si hodlá vybrat 19.11.1996. Vypočtete částku, kterou bude mít na kontě požadovaný den :

- a) jestliže nebude platit daň z příjmů  
b) bude-li platit 15 % daň z příjmů.

## Souhrnná cvičení

- 1) Pan Pátek si půjčil na pět měsíců částku ve výši 70 000,- Kč na roční 13 % úrok. Kolik Kč zaplatí na úrocích ?
- 2) Pan Sobota má v bance účet na roční 4 % úrok. 1. ledna 2000 měl na účtu 24 000,- Kč. 1. dubna 2000 vložil 8 000,- Kč. 1. října 2000 vybral 12 000,- Kč. Kolik Kč měl na účtu 1. ledna 2001 po připsání úroků ?
- 3) Vypočtete kolik Kč budete mít v bance po 5 letech z 215 000,- Kč při roční úrokové míře 16,75% .
- 4) Při roční úrokovací míře 4,5 % banka vyplatila Klimentovi částku 39 818,82 Kč. Kolik Kč před 8 lety vložil do banky ?
- 5) Uložil jsem si do banky částku 30 000,- Kč při roční 16 % úrokové míře. Banka mi odečítá z úroků 15 % daň. Budu mít za čtyři roky na zaplacení zájezdu v ceně 53 000,- Kč ? Kolik Kč mi zůstane na výměnu valut ?
- 6) Půjčím si v bance 40 000,- Kč při roční 9 % úrokové míře na 4 roky. Kolik zaplatím na úrocích ?
- 7) O kolik Kč vzroste mi v bance konto, jestliže jsem před 10 lety vložil 6 000,- Kč při roční úrokové míře 9 %, jestliže bance musím zaplatit 18 % daň z příjmu.
- 8) 26. března 1991 si podnikatel vypůjčil při roční 15 % úrokovací míře 80 000,- Kč. Jak velkou částkou může splatit dluh 31.12.1994 ?
- 9) Kolik Kč bude muset zaplatit dlužník, aby 13. července 1995 splatil dluh 10 000,- Kč, které si půjčil 1. ledna 1991 na roční 12 % úrok ?
- 10) 17. dubna 1993 uložil občan do spořitelny 8 000,- Kč na vkladní knížku úročenou ročně 9 %. Kolik Kč bude mít na vkladní knížce 19. března 1997 a jak velké budou úroky. Daň z příjmu neplatil.
- 11) Pan Novák uložil 12. února 1991 v bance částku 30 000,- Kč na roční 13 % úrokovací míru, které si hodlá vybrat 16. září 1996. Vypočtete částku, kterou bude mít na kontě požadovaný den :

- a) jestliže nebude platit daň z příjmů  
 b) bude-li platit 15 % daň z příjmů.

12) Vypočtete kolik korun naspoříte, budete-li po dobu osmi let při roční úrokové míře 9 % pravidelně ročně stádat 3 000.- Kč : a) počátkem roku b) koncem roku

13) Pravidelně měsíčně stádate 200,- Kč po dobu tří let při roční úrokové míře 9 %. Kolik Kč ušetříte jestliže budete peníze ukládat : a) začátkem každého měsíce, b) koncem každého měsíce.

## Výsledky :

- 1) 4 023, 75 Kč, 2) 14 000.- Kč , 3) 107 333, 34 Kč , 4) 600.- Kč , 5) 13 715.- Kč , 6) 1 116.- Kč ,  
 7) 1 724,80 Kč , 8) 143 963,33 Kč , 9) 16 000.- Kč , 10) úloha nemá řešení pro nedostatek údajů ,  
 11) 1. října 1999 12) 335 500.- Kč , 13) 83 157,1 Kč , 14) 5 000,- Kč , 15) 85 794,96 Kč , 16) 18 000,- Kč ,  
 17) 30 127,03 Kč ,

## Souhrnná cvičení

- 1) 4 550.- Kč , 2) 21 080 Kč , 3) 468 097,03 Kč 4) 28 000.- Kč , 5) ano, na valuty budu mít 1 319,18 Kč ,  
 6) 16 463, 26 Kč , 7) 6 228,84 Kč , 8) 135 611,35 Kč , 9) 16 742,24 Kč , 10) 11 232,96 Kč , 3 232,96 Kč ,  
 11 a) 59 764,80 Kč , b) 54 163,24 Kč , 12 a) 36 063,10 Kč , b) 33 085,42 Kč 13 a) 8 250,98 Kč b) 8 191,97 Kč