8. Kombinatorika

8.1. Opakování učiva pro 6. ročník

Pečlivě si znovu prostuduj uvedené učivo, včetně příkladů.

8.2. Prohloubení učiva ze 6. ročníku

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Příklad 1 : Vyjádři jediným kombinačním číslem $\binom{50}{4} + \binom{50}{45} =$

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

obecně platí :

$$\begin{array}{ccc}
x & & y \\
 & x+y &
\end{array}$$

Pascalův trojúhelník můžeme vyjádřit také takto :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

obecně platí řada :

$\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n}{3}$ ……………. $\binom{n}{n-2}$ $\binom{n}{n-1}$ $\binom{n}{n}$

Tyto znalosti budeme potřebovat na střední škole při aplikaci binomické věty.

$(a + b)^5 = \mathbf{a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}$

Příklad 2 : Vyjádři $(a + b)^5$ pomocí kombinačních čísel.

Příklad 3 : Vyjádři obecně $(a + b)^n =$ (Binomická věta)

8.3. Kombinace s opakovním

Příklad : Máme písmena : a, b, c, d. Vypiš všechny dvojice tak, že se prvky mohou opakovat.

vypíšeme dvojice, kdy se prvky nemohou opakovat :

přidáme dvojice, kde se prvky opakuji

řešení :	ab			aa
	ac	bc		bb
	ad	bd	cd	cc
				dd

Příklad : Vypiš kombinace třetí s opakováním u prvků : a, b, c, d, e

řešení :	abc			aaa	bba	cca	dda	eea
	abd	acd		aab	bbb	ccb	ddb	eeb
	abe	ace	ade	aac	bbc	ccc	ddc	eec
	bcd			aad	bbd	ccd	ddd	eed
	bce	bde		aae	bbe	cce	dde	eee
	cde							

Počet kombinací s opakováním vypočteme podle vzorce :

$$K'(k ; n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad : Vypočti : a) K´(2 ; 4) = b) K´ (3 ; 5) =

a) K´(2 ; 4) $= \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \mathbf{10}$

b) K´ (3 ; 5) $= \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \mathbf{35}$

Příklad 4 : Vypočti : a) K´(4 ; 7) b) K´(2 ; 7) c) K´(4 ; 8)
d) K´(2 ; 9) e) K´(3 ; 10) f) K´(4 ; 3)

Příklad 5 : Kolik čtveřic vytvoříš z 8 prvků, jestliže můžeš prvky opakovat ?

8.4. Variace s opakovním

Počet variací s opakováním vypočítáme podle vzorce : $V'(k; n) = n^k$

Příklad : Vypište dvoučlenné variace s opakováním tří prvků

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	bc	cc

Příklad : Kolik lze sestavit poznávacích čísel na osobní automobily, jestliže poznávací číslo se skládá ze 3 písmen a 4 číslic. Abeceda má 28 písmen, číslic máme 10.

V´ (3 ; 28) . V´(4 ; 10) = $28^3 . 10^4$ = **219 520 000**

Příklad 6 : Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1 500 obyvateli může začínat jedním z 32 písmen abecedy. Je možné, aby alespoň dva obyvatelé městečka měli stejné iniciály ?

8.5. Permutace s opakovním

Tato problematika je již dosti složitá a necháme ji až na střední školu.

Souhrnná cvičení

1. Vypočti : $\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$

2. Je dáno n různých prvků. Vytvoříme-li z těchto prvků kombinace bez opakování, pak se počet kombinací druhé třídy bude rovnat počtu kombinací třetí třídy. Kolik je n ?

3. V šachovém turnaji bylo sehráno 28 partií tak, že každý šachista hrál s každým právě jednou. Kolik bylo účastníků turnaje ?

4. V kádru hokejového družstva je 10 útočníků, 8 obránců a 2 brankaři. Kolika způsoby může trenér sestavit jednotlivé sestavy ve složení : 3 útočníci, 2 obránci a 1 brankář .

5. Urči všechna přirozená čísla, pro které platí
   a) n! – 56.(n – 2)! + 1! = 0!
   b) n! + n.n! = (n + 1)!

6. Vypočti : a) K´(2 ; 6) b) K´(3 ; 7) c) K´(3 ; 8)
   d) K´(5 ; 9) e) K´(3 ; 6) f) K´(3 ; 18)

7. Kolik pětic je možné udělat z 10 prvků, jestliže se prvky mohou opakovat?

8. Kolik trojic lze vytvořit z číslic 2, 3, 5, 7, jestliže nezáleží na pořadí prvků a prvky se mohou opakovat ?

9. Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z 5 kotoučků nastavíme správnou číslici. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít a neznáme číselnou kombinaci zámku.

10. Urči kolika způsoby může n táborníků při ranním nástupu na rozcvičku nastoupit do řady?

11. Určete počet n prvků tak,

a) aby z nich bylo možné utvořit 40 320 permutací bez opakování,
b) aby při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56 krát,
c) aby při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací bez opakování zmenšil 20krát.

12. Dvě družstva soutěžící v lehké atletice se dohodla na přepočítávání umístění na body takto: umístění

umístění	1.	2.	3.	4.	5.	6.
počet bodů	10	6	4	3	2	1.

V každé disciplíně za družstvo startují tři závodníci.

a) kolik existuje kombinací bez opakování vzájemného umístění závodníků v družstvu,
b) vypiš tyto všechny možnosti umístění závodníků družstva v získaných bodech,
c) jaké bylo umístění, jestliže družstvo získalo 14 bodů,
d) jaké bylo umístění závodníků, jestliže družstvo získalo 11 bodů,

13) Trenér košíkové má sestavit pětičlenné družstvo, v němž musí být tři hoši a dvě dívky. Vybírat může ze čtyř hochů a čtyř dívek. Kolik možností má k sestavení družstva ?

Výsledky :

1) $\binom{51}{5}$ **, 2)** $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$,

3) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$,

4 a) 210 , **b)** 28 , **c)** 330 , **d)** 45, **e)** 220 , **f)** nemá řešení ,**5)** 330 ,
6) $32^2 = 1024 < 1500$ Tato možnost tady je. ,

Souhrnná cvičení

1) n^2 pro $n > 2$,**2)** 5 ,**3)** 8 ,**4)** 6 720 ,**5 a)** 8 , **b)** všechna přirozená čísla,
6 a) 21 , **b)** 84 , **c)** 120 , **d)** 1287 , **e)** 56 , **f)** 1 140 ,**7)** 2002 ,**8)** 20 ,**9)** 59 049 ,
10) n! ,**11 a)** 8 , **b)** 6 , **c)** 5 ,
12 a) 20, **b)** 10 6 4, 10 6 3, 10 4 3, 10 6 2, 10 4 2, 10 3 2, 10 6 1, 10 4 1, 10 3 1, 10 2 1, 6 4 3, 6 4 2, 6 3 2, 6 4 1, 6 3 1, 6 2 1, 4 3 2, 4 3 1, 4 2 1, 3 2 1. **c)** 1. 4. 6.
d) 2. 3. 6., 2. 4. 5.
13) 24 možností ,