9. Úvod do středoškolského studia

- rozšiřující učivo –

9.1. Další znalosti o trojúhelníku

9.1.1. Sinova věta

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\chi}$$

Příklad 1 : V trojúhelníku ABC platí : c = 20 cm, $\alpha = 45^0$, $\beta = 105^0$. Vypočtěte velikosti zbývajících stran trojúhelníka ABC.

Příklad 2 : v trojúhelníku ABC platí : a = 11,6 dm, c = 9 dm, $\alpha = 65^0\ 30'$. Vypočtěte stranu b a zbývající úhly.

9.1.2. Kosinova věta

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$ CZ cyklická záměna

Příklad 3 : V trojúhelníku ABC platí : a = 51,32 mm c = 34,76mm
$\beta = 126^0\ 12'$. Vypočtěte : b, α, γ.

Příklad 4 : V trojúhelníku ABC platí : a = 16,9 cm, b = 26 cm, c = 27,3 cm. Vypočtěte velikost vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníka ABC.

Příklad 5 : Tři kružnice s poloměry 4 cm, 5 cm, 6 cm se vzájemně vně dotýkají. Vypočítejte velikosti úhlů, které svírají jejich středné.

9.1.3. Další vztahy, které platí v trojúhelníku

$$r = \frac{a}{2.\sin\alpha} = \frac{b}{2.\sin\beta} = \frac{c}{2.\sin\chi}$$

$S = 0{,}5.a.b.\sin\gamma$ CZ

$S = \rho\ .\ s$ kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$S = \frac{a.b.c}{4r}$$

$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$ Heronův vzorec

Příklad 6 : Vypočtěte obvod trojúhelníka ABC, který je vepsaný do kružnice o poloměru 5 cm, jehož dva vnitřní úhly mají velikost 45^0 a 60^0.

Příklad 7 : Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, je-li $a = 7{,}5$ cm, $c = 9{,}2$ cm, $\beta = 134^0$.

Příklad 8 : Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, je-li $a = 25{,}1$ cm, $\alpha = 63^0$, $\beta = 38^0$.

Příklad 9 : Síly $F_1 = 10$ N a $F_2 = 5$ N působí v jednom bodě a svírají úhel $52^0\,30'$. Jak veliká musí být třetí síla působící v tomtéž bodě, aby svými účinky vyrušila působení sil F_1 a F_2? Vypočtěte velikost úhlu, který svírá tato síla se sílou F_2.

Příklad 10 : Vnitřní úhly trojúhelníka jsou v poměru $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$. V jakém poměru jsou strany $a : b : c$?

Příklad 11 : V trojúhelníku ABC platí : $\alpha = 45^0$, $\beta = 45^0$. V jakém poměru jsou strany $a : b : c$?

Příklad 12 : Vypočtěte vnitřní úhly v trojúhelníku ABC, je-li $a : b = 2 : 3$, $\alpha = 41^0\,25'$.

Příklad 13 : V trojúhelníku ABC platí : $c = 47$ cm, $\alpha = 37^0\,50'$, $\beta = 69^0 30'$. Vypočtěte a, b, γ .

Příklad 14 : V trojúhelníku ABC platí : $a = 16{,}5$ cm, $\beta = 48/^0 10'$, $\gamma = 59^0\,40'$. Vypočítejte b, c, α.

Příklad 15 : V trojúhelníku ABC platí : $b = 72{,}2$ cm, $\alpha = 51^0 30'$, vnější úhel k úhlu γ měří $98^0 40'$. Vypočítejte : a, c, β.

Příklad 16 : Jak dlouhá je strana c v trojúhelníku ABC, jestliže strany a a b svírají úhel 30^0 ?

Příklad 17 : Jak velký úhel je úhel γ v trojúhelníku ABC, jestliže :

a) $c^2 = a^2 + b^2 - a.b$;
b) $c^2 = a^2 + b^2 + a.b$;

Příklad 18 : V trojúhelníku ABC platí : $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. Je tento trojúhelník tupoúhlý?

Příklad 19 : V trojúhelníku ABC vypočtěte výšku v_c, je-li :

a) $a = 7{,}9$ cm, $b = 10{,}3$ cm, $c = 12{,}5$ cm,
b) b) $c = 17{,}4$ cm, $b = 25{,}9$ cm, $\beta = 62^0\,15'$.

Příklad 20 : Tři kružnice s poloměry 3 cm, 5 cm, 7 cm se každé dvě vně dotýkají. Vypočtěte obsah plochy, která vznikne mezi těmito kružnicemi.

Příklad 21 : V rovnoběžníku ABCD platí : a = 175 mm, b = 80 mm, $\alpha = 65^0$. Vypočtěte velikost úhlopříček.

Výsledky :

1) a = 28,28 cm, b = 38,64 cm;
2) b = 11,9 dm, $\beta = 69^0\ 36'$, $\gamma = 44^0\ 54'$;
3) b = 77,13 mm, $\alpha = 32^0 28'$, $\gamma = 21^0\ 20'$;
4) $\alpha = 36^0\ 50'$, $\alpha' = 143^0\ 10'$, $\beta = 67^0\ 20'$, $\beta' = 112^0\ 40'$, $\gamma = 75^0\ 50'$,
$\gamma' = 104^0\ 10'$;
5) $50^0\ 28'$, 59^0, $70^0\ 32'$;
6) 25,4 cm;
7) 24,8 cm^2;
8) b = 17,34 cm, $\gamma = 79^0$, 213,6 cm^2;
9) 13,63 N, $144^0\ 25'$;
10) 1 : $\sqrt{3}$: 2;
11) a : b : c = $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$: 2;
12) $\beta = 82^0\ 53'$, $\gamma = 55^0\ 42'$;
13) a = 30,2 cm, b = 46,1 cm, $\gamma = 72^0\ 40'$;
14) b = 12,9 cm, c = 15 cm, $\alpha = 72^0\ 10'$;
15) a = 113,6 cm, c = 143,6 cm, $\beta = 29^0 50'$;
16) c = $\sqrt{a^2 + b^2 - a.b.\sqrt{3}}$;
17) a) $\gamma = 60^0$; b) 120^0;
18) ano, $\alpha = 26^0 20'$, $\beta = 36^0\ 20'$, $\gamma = 117^0\ 20'$;
19) a) 6,48 cm; b) 25,59 cm;
20) přibližně 3,31 cm^2;
21) 159 mm, 221 mm;

9.2. Matematické posloupnosti

9.2.1. Aritmetická posloupnost

Definice posloupnosti : a_1; $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$; a_4; a_5; ….

Vzorce $a_{n+1} = a_n + d$ d – diference

$$a_n = a_1 + (n - 1).d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$s_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n)$$

s_n – součet prvních n- členů aritmetické posloupnosti

Příklad : Vypočtěte šestý člen aritmetické posloupnosti, je-li $a_1 = 3$, diference 4.

Řešení : $a_6 = a_1 + 5.d$
$a_6 = 3 + 5.4 = 23$

Příklad 1 : Vypočtěte první člen aritmetické posloupnosti, má-li třetí člen posloupnosti hodnotu 10 s diference je 3

Příklad 2 : Vypočtěte desátý člen aritmetické posloupnosti, je-li pátý člen roven -4 a diference je -3.

Příklad 3 : Vypočtěte osmý člen aritmetické posloupnosti, je-li čtvrtý člen $-\frac{1}{4}$ a diference činí -7.

Příklad 4 : Kolik je diference aritmetické posloupnosti, je-li šestý člen posloupnosti 10 a jedenáctý člen 40.

Příklad 5 : Vypočtěte součet prvních šesti členů aritmetické posloupnosti, která má první člen 5 a diference je 7.

Příklad 6 : Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 120, první člen této posloupnosti má hodnotu 10. Vypočtěte hodnotu desátého člena posloupnosti. Jakou hodnotu má diference této posloupnosti ?

Příklad 7 : Čtvrtý člen aritmetické posloupnosti má hodnotu 12, diference 4. Vypočtěte součet členů této posloupnosti od čtvrtého do desátého člena včetně.

Příklad 8 : třetí člen aritmetické posloupnosti má hodnotu 21, osmý člen posloupnosti má hodnotu 51. Vypočtěte součet členů této posloupnosti od sedmého člena do desátého včetně.

Příklad 9 : Součet prvních osmi členů aritmetické posloupnosti činí 120, první člen této posloupnosti má hodnotu 14. Vypočtěte součet prvních devíti členů této aritmetické posloupnosti.

Příklad 10 : Diference posloupnosti je 2, první člen má hodnotu 4. Jakou hodnotu má čtvrtý člen této posloupnosti ?
Příklad 11: Čtvrtý člen aritmetické posloupnosti má hodnotu 100, šestý člen 124. Vypočtěte součet prvních osmi členů této aritmetické posloupnosti.

Příklad 12 : Čtvrtý člen aritmetické posloupnosti má hodnotu -5, sedmý člen má hodnotu -14. Vypočtěte : a) desátý člen této posloupnosti
b) součet prvních osmi členů této posloupnosti
c) součet členů této posloupnosti od pátého člena do devátého včetně.

Příklad 13 : Součet prvních sedmi členů aritmetické posloupnosti je 196, prvních dvanácti členů této posloupnosti je 576. Vypočtěte součet prvních deseti členů této aritmetické posloupnosti.

Příklad 14 : První člen aritmetické posloupnosti má hodnotu 13, diference této posloupnosti činí 5, součet prvních deseti členů této posloupnosti je 355. Vypočtěte součet prvních čtrnácti členů této aritmetické posloupnosti.

9.2.2. Geometrická posloupnost

definice posloupnosti a_1; $a_2 = a_1 \,.\, q$; $a_3 = a_1 \,.\, q^2$; $a_4 = a_1 \,.\, q^3$; a_5, a_6,
vzorce : $a_{n+1} = a_n \,.\, q$ q – kvocient
$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

pro $q \neq 1$ $s_n = a_1 \,.\, \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

pro $q = 1$ $s_n = n \,.\, a_1$

Příklad 15 : První člen geometrické posloupnosti je 7, kvocient 4. Vypočtěte čtvrtý člen této posloupnosti.

Příklad 16 : Třetí člen geometrické posloupnosti je 10, sedmý člen je 160. Vypočtěte hodnotu kvocientu.

Příklad 17 : První člen geometrické posloupnosti je 8, čtvrtý je 216. Vypočítejte součet prvních čtyř členů této posloupnosti.

Příklad 18 : První člen geometrické posloupnosti je 3, osmý je 384. Vypočtěte součet prvních osmi členů této posloupnosti.

Příklad 19 : první člen geometrické posloupnosti je -3, kvocient činí 5. Vypočtěte sedmý člen této posloupnosti a součet prvních devíti členů posloupnosti.
Příklad 20 : První člen geometrické posloupnosti je 4, kvocient je 3. Vypočítejte součet pátého až desátého člena této posloupnosti včetně.

Příklad 21: V osmičlenné geometrické posloupnosti je součet prvních čtyř členů 15, druhých čtyř členů 240. Určete posloupnost.

Příklad 22: Tři čísla, která tvoří aritmetickou posloupnost, mají součet 30. Odečteme-li od prvního 5, od druhého 4 a třetí ponecháme, dostaneme geometrickou posloupnost. Určete ji.

Příklad 23: Aritmetická i geometrická posloupnost začínají číslem 6 a také druhé členy jsou si rovny. Třetí člen aritmetické posloupnosti je s třetím členem geometrické posloupnosti v poměru 3 : 4. Určete obě posloupnosti.

Příklad 24: Stanovte takové číslo, aby zvětšeno postupně o 7, 15, 27 dalo tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Příklad 25:Mezi čísla 4 a 108 vložte dvě čísla tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost.

Výsledky :

1) 4;
2) -19;
3) -28,25;
4) 6;
5) 135;
6) 14; $\frac{4}{9}$;
7) 168;
8) 216;
9) $136\frac{2}{7}$;
10) 10;
11) 848;
12) a) -23; b) -52; c) -70;
13) 400;
14) 637;
15) 448;
16) $q_1 = 2$ $q_2 = -2$;
17) 320;
18) 765;
19) $a_7 = -46\,875$; $s_9 = -1\,464\,843$;
20) 117 936;
21) $q_1 = 2$, $a_1 = 1$ 1;2;4;8;16;32;64;128;
$q_2 = -2$ $a_1 = -3$ -3;6;-12;24;-48;96;-192;384;
22) $d_1 = -7$ $a_1 = 17$ 12;6;3;
$d_2 = 2$ $a_1 = 8$ 3;6;12;
23) $q_1 = 2$ $d = 6$ 6;12;18; 6;12;24
$q_2 = \frac{2}{3}$ $d = -2$ 6;4;2; 6;4;$\frac{8}{3}$;
24) 9;
25) 12; 36;

Souhrnné cvičení :

1) Vypočtěte zbývající prvky aritmetické posloupnosti :
a) $a_1 = 450$, $d = -24$, $a_n = 210$, $n =$ $s_n =$
b) $a_1 = 6$, $s_{10} = 195$, $a_{10} =$ $d =$
c) $a_n = 80$, $d = 8$, $s_n = 416$, $a_1 =$ $n =$

d) $s_n = 245$, $d = 5$, $a_n = 47$, $n =$ $a_1 =$
e) $d = -12$, $a_n = 15$, $s_n = 456$, $n =$ $a_1 =$
f) $a_4 = 16$, $a_8 = 24$, $s_n = 90$, $n =$
g) $a_1 + a_5 = 30$, $a_3 + a_4 = 36$, $a_1 =$ $d =$
h) $a_2 + a_5 - a_3 = 10$, $a_1 + a_6 = 17$, $a_1 =$ $d =$

2) Mezi čísla, která tvoří kořeny rovnice $2^{x^2-3x+2} = 1$ vložte tři čísla tak, aby s původními tvořila aritmetickou posloupnost.

3) V aritmetické posloupnosti 3; 6; 9; …. vyhledejte člen, který se rovná polovině součtu všech předcházejících členů.

4) Dvě aritmetické posloupnosti mají stejný první člen a stejný počet členů. Poslední člen první posloupnosti je 15, druhé posloupnosti je 21. Součet všech členů první posloupnosti je 63, druhé 84. Napište členy obou posloupností.

5) Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, v níž platí :
a) $a_4 = -\frac{8}{3}$, $a_6 = -\frac{32}{3}$
b) $a_1 - a_2 + a_3 = 9$ $a_4 - a_5 + a_6 = 72$
c) $a_1 + a_4 = 112$ $a_2 + a_3 = 48$
d) $a_1 + a_2 = 4$ $a_2 - a_4 = -24$
6) V geometrické posloupnosti platí : $a_1 = 18$ $a_n = 13\,122$ $s_n = 19\,674$. Určete n a kvocient.

Výsledky souhrnných cvičení

1) a) $n = 11$, $s_{11} = 3\,630$; b) $a_{10} = 33$, $d = 3$; c) $n_1 = 8$, $a_1 = 24$; $n_2 = 13$, $a_1 = -16$; d) $n_1 = 10$, $a_1 = 2$; $n_2 = 9{,}8$ nemůže být; e) $n_1 = -\frac{114}{12}$ nemůže být, $n_2 = 8$, $a_1 = 99$; f) $n_1 = -15$ nemůže být, $n_2 = 6$; g) $d = 6$, $a_1 = 3$;
h) d = 3, a1 = 1;
2) 1,25 1,5 1,75;
3) n = 0 nemůže být, n = 5, a_5;
4) 3;5;7;9;11;13;15; 3;6;9;12;15;18;21;
5) a) $q = 2$ $a_1 = -\frac{1}{3}$; $q = -2$ $a_1 = \frac{1}{3}$; b) $q = 2$ $a_1 = 3$; c) $q = 3$ $a_1 = 4$; $q = \frac{1}{3}$ $a_1 = 108$; d) $q_1 = 3$ $a_1 = 1$ $q_2 = -2$ $a_1 = -4$;
6) n = 7 q = 3 ;

9.3. Další druhy rovnic

9.3.1. Diofantické rovnice

Příklad : Vyřešte rovnici 3x – 5y = 19, kde x a y jsou celá nezáporná čísla.

Řešení : $3x = 19 + 5y$

$x = \frac{19+5y}{3} = 6 + y + \frac{1+2y}{3}$ kde $\frac{1+2y}{3}$ je celé číslo

$x = 6 + y + t$ $\frac{1+2y}{3} = t$

$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}$

$y = t + u$ kde u je celé číslo

$u = \frac{t-1}{2}$

$t = 2u + 1$

$y = t + u = 2u + 1 + u = 3u + 1$

$x = 6 + y + t = 6 +(3u + 1) + (2u + 1) = 8 + 5u$

$x = 8 + 5u$

$y = t + u = (2u + 1) + u = 3u + 1$

$8 + 5u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq -\frac{8}{5}$

$\Rightarrow$ **$u \geq -\frac{1}{3}$ kde celé nezáporné číslo**

$1 + 3u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq -\frac{1}{3}$

U	0	1	2	3
X=8+5u	8	13	18	23
Y=1+3u	1	4	7	10

Řešením rovnice 3x – 5y = 19 jsou uspořádané dvojice hodnot [x; y]
[8; 1], [13; 4] , [18; 7] , [23; 10] atd.

Příklad 1 : Řešte rovnici 617.x – 125.y = 91, kde x, y jsou celá čísla.

Příklad 2 : Máme 1 Kč a máme koupit 40 známek jednohaléřových, čtyřhaléřových a dvanáctihaléřových. Kolik bude jednohaléřových, čtyřhaléřových a dvanáctihaléřových známek?

Příklad 3 : Vynásobíme-li datum narození 12 a sečteme-li toto číslo se součinem čísla 31 a číslem pořadí měsíce, kdy se neznámý narodil, dostaneme číslo 170. Který den v roce se neznámý narodil ?

Příklad 4 : Délky stran obdélníka jsou celá čísla. Určete je tak, aby číselná hodnota obvodu a obsahu obdélníka byla stejná.

9.3.2. Exponencionální rovnice

Vyřešte rovnici : $2^x = 16$.

Řešení : $2^x = 2^4$

$x = 4$ Zkouška L : $2^4 = 16$

P = 16 L = P

<u>$x = 4$</u>

Příklad 5. Vyřešte rovnici : a) $4^{x-6} = 64$

b) $5^{x^2+4x-21} = 5$

c) $3^{x^2-5x+6} = 1$

d) $4^x = 0,25$

e) $10^x = 0,01$

f) $(0,75)^{x+3} = \frac{27}{64}$

g) $3.2^x = \frac{1}{3^{-1}}$

Příklad 6. Vyřešte rovnici : a) $3^{x+1} - 3^x - 162 = 0$

b) $3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0$

c) $5.4^{x+1} - 240 = 4^{x+2} + 4^{x-1}$

d) $9^{\sqrt{x+1}} = 27.3^{\sqrt{x+1}}$

e) $2^{a+5} + 3.2^{a+4} + 5.2^{a+3} = 30$

f) $6^{1+x} = 6^{x-1}$

h) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$

i) $4.3^{x+1} - 315 = 3^{x-1}$

j) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^3\right]^{10x^2-21x+4} = \left[\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}\right]^{-6x^2+11x-15}$

k) $3^{\frac{x+3}{x}} \cdot 3^{\frac{x-3}{x}} = 27$

Příklad 7 : Vypočítejte : a) $3^{\frac{1}{5x+1}} = 81$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x+1} = \left(6\frac{1}{4}\right)^4$

c) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 96$ d) $3.(4^x + 9^{x+1}) = 2.(3.4^{x+1} - \frac{1}{4}.9^{x+1})$

e) $2^{2x-5} = \frac{1}{16}$

Výsledky :

1) x = 125u-27, y = 617u – 134, [98; 483], [223; 1100] , ….. ;

2) [20; 20; 0], [28; 9; 3] ;
3) 9. února;
4) [3 6], [4; 4], [6; 3];
5) a) 9; b) 3; -7; c) 2; 3; d) -1; e) -2; f) 0; g) 0;
6) a) 4; b) 1; 2; c) 3; d) 8; e) -2; f) nemá řešení; h) 1; i) 3; j) $\frac{6}{7}$; $1\frac{1}{6}$;
k) nemá řešení;
7) a) -1; b) -3; c) 4; d) -0,5; e) 0,5;

9.4. Základy analytické geometrie

9.4.1. Orientovaná úsečka

Orientovaná úsečka je taková úsečka, která má určen počáteční bod a koncový bod.

orientovaná úsečka AB - A počáteční bod úsečky
B koncový bod úsečky

9.4.2. Vektor

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček stejné délky.

Značíme : $\vec{u}$ (šipka má být napsána přesně nad písmenem)
čteme vektor u

$/\vec{u}/$ - velikost vektoru u
$/\vec{u}/ = /\vec{AB}/$

Vektor $\vec{u}$ má složku u_1 a u_2 . Zapisujeme $\vec{u} = (u_1; u_2)$

Příklad : Vektor $\vec{u}$ je určen orientovanou úsečkou AB, kde A [-4 ; 2] , B[3 ; -1]. Určete vektor $\vec{u}$.
Řešení : $\vec{u} = B - A$ $u_1 = 3 - (-4) = 7$ $u_2 = -1 - 2 = -3$
$\underline{\vec{u} = (7; -3)}$

Příklad 1 : Určete $\vec{u}$, který je určen orientovanou úsečkou AB :
a) A [-1 ; 4] , B[2 ; -2],
b) A [3 ; 4] , B[-3 ; 5],
c) A [-3 ; 0] , B[0 ; -2],
d) A [-2 ; -1] , B[2 ; 0],
e) A [0 ; 0] , B[-5 ; -1],

Velikost vektoru

Velikostí vektoru $\vec{u}$ určeného orientovanou úsečkou AB rozumíme velikost úsečky AB.
Velikost vektoru značíme $/\vec{u}/$
Velikost vektoru vypočítáme $/\vec{u}/ = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Příklad : Vypočtěte velikost vektoru $\vec{u} = (7; -3)$
Řešení : $/\vec{u}/ = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \underline{\sqrt{58}}$ (jednotek)

Příklad 2 : Určete velikost vektorů : a) $\vec{u} = (3; -6)$ b) $\vec{u} = (-6; 1)$ c) $\vec{u} = (3; -2)$ d) $\vec{u} = (4; 1)$ e) $\vec{u} = (-5; -1)$ f) $\vec{u} = (0; -2)$
g) $\vec{u} = (3; 4)$

Rovnost vektorů

Dva vektory $\underline{\vec{u}}$ a $\underline{\vec{v}}$ se rovnají jestliže se rovnají jejich příslušné složky.

$\vec{u} = \vec{v}$ jestliže $u_1 = v_1$ a současně $u_2 = v_2$

Součet dvou vektorů

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2)$$

Příklad 3 : Doplňte složku vektoru, aby se vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ rovnaly.
a) $\vec{u} = (3; -6)$; $\vec{v} = (3; v_2)$
b) $\vec{u} = (-6; 1)$; $\vec{v} = (v_1; -6)$

Příklad 4 : Sečtěte vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
a) $\vec{u} = (3; -6)$ $\vec{v} = (4; -1)$ b) $\vec{u} = (-6; 1)$ $\vec{v} = (1; -4)$
c) $\vec{u} = (3; -2)$ $\vec{v} = (-3; -2)$ d) $\vec{u} = (4; 1)$ $\vec{v} = (-4; -1)$
e) $\vec{u} = (-5; -1)$ $\vec{v} = (0; -2)$ f) $\vec{u} = (3; 4)$ $\vec{v} = (0 ; 0)$

Opačný vektor a rozdíl

Je-li dán vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$, pak opačným vektorem bude $-\vec{u} = (-u_1; -u_2)$.

Je-li dán vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a vektor $\vec{v} = (v_1; v_2)$ pak rozdíl vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ má podobu $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1 ; u_2 - v_2)$

Příklad 5 : Určete opačné vektory k vektorům : a) $\vec{u} = (3; -6)$
b) $\vec{u} = (-6; 1)$ c) $\vec{u} = (3; -2)$ d) $\vec{u} = (4; 1)$
e) $\vec{u} = (-5; -1)$ f) $\vec{u} = (0; -2)$ g) $\vec{u} = (3; 4)$

Příklad 6 : Odečtěte vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
a) $\vec{u} = (3; -6)$ $\vec{v} = (4; -1)$ b) $\vec{u} = (-6; 1)$ $\vec{v} = (1; -4)$
c) $\vec{u} = (3; -2)$ $\vec{v} = (-3; -2)$ d) $\vec{u} = (4; 1)$ $\vec{v} = (-4; -1)$
e) $\vec{u} = (-5; -1)$ $\vec{v} = (0; -2)$ f) $\vec{u} = (3; 4)$ $\vec{v} = (0 ; 0)$

Násobení vektorů

k-násobek vektoru $\vec{u}$, kde k je libovolné reálné číslo k . $\vec{u}$ = (k.u_1; k.u_2)

skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ $\vec{u}.\vec{v}$ = ($u_1.v_1 + u_2.v_2$)

Příklad 7 : Vypočtěte k násobek vektoru $\vec{u}$:
a) $\vec{u}$ = (3; -6) k = 2 b) $\vec{u}$ = (-6; 1) k = 4 c) $\vec{u}$ = (3; -2) k = -3 d) $\vec{u}$ = (4; 1) k = -2e) $\vec{u}$ = (-5; -1) k = 6 f) $\vec{u}$ = (0; -2) k = -3 g) $\vec{u}$ = (3; 4) k = 3

Příklad 8 : Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
a) $\vec{u}$ = (3; -6) $\vec{v}$ = (4; -1) b) $\vec{u}$ = (-6; 1) $\vec{v}$ = (1; -4)
c) $\vec{u}$ = (3; -2) $\vec{v}$ = (-3; -2) d) $\vec{u}$ = (4; 1) $\vec{v}$ = (-4; -1)
e) $\vec{u}$ = (-5; -1) $\vec{v}$ = (0; -2) f) $\vec{u}$ = (3; 4) $\vec{v}$ = (0 ; 1)

Úhel dvou vektorů

Máme dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, které svírají úhel γ, pak platí :

$$\cos \gamma = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Příklad 9 : Vypočtěte úhel, který svírají vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
a) $\vec{u}$ = (3; -6) $\vec{v}$ = (4; -1) b) $\vec{u}$ = (-6; 1) $\vec{v}$ = (1; -4)
c) $\vec{u}$ = (3; -2) $\vec{v}$ = (-3; -2) d) $\vec{u}$ = (4; 1) $\vec{v}$ = (-4; -1)
e) $\vec{u}$ = (-5; -1) $\vec{v}$ = (0; -2) f) $\vec{u}$ = (3; 4) $\vec{v}$ = (0 ; 1)
g) $\vec{u}$ = (3; -6) $\vec{v}$ = (6; 3)

Jsou dva vektory navzájem kolmé, svírají úhel 90^0 . Kosinus 90^0 je roven 0. Proto platí :

$$\frac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$$

Tato situace nastane je-li : $v_1 = -u_2$ $v_2 = u_1$

Vektory $\vec{u}$(4; 3) a $\vec{v}$(-3; 4) jsou navzájem kolmé, protože
$u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$. Po dosazení dostaneme : 4.(-3) + 3.4 = 0

Na vektor $\vec{u}$ = (u_1; u_2) je kolmý vektor : $\vec{v}$ = (v_1; v_2) a k němu vektor opačný -$\vec{v}$ = (-v_1; -v_2). Při výpočtech pro naši potřebu stačí uvádět pouze vektor $\vec{v}$.

Příklad 10 : Vypočítejte vektor $\vec{v}$, který je kolmý na vektor $\vec{u}$:
a) $\vec{u}$ = (3; -6) b) $\vec{u}$ = (-6; 1) c) $\vec{u}$ = (3; -2)
d) $\vec{u}$ = (4; 1) e) $\vec{u}$ = (-5; -1) f) $\vec{u}$ = (0; -2)
g) $\vec{u}$ = (3; 4)

9.4.3. Přímka a úsečka

Střed úsečky

Úsečka AB je určena body A [x_A ; y_A] a B [x_B ; y_B] . Středem úsečky je bod C o souřadnicích : C [x_C ; y_C], $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ a $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Příklad 11 : Určete souřadnice středu úsečky AB :

a) A [2; -1] B [3; 4]
b) A [0; -1] B [3; 3]
c) A [-1; 5] B [-1 ; 4]
d) A [-3; 2] B [6; -2]
e) A [0; 0] B [-2; 1]
f) A [-4; 2] B [2; -4]

Velikost úsečky

Velikost úsečky AB vypočítáme podle vztahu :

$$/AB/ = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Velikost úsečky nám velmi často vyjde ve tvaru druhé odmocniny.

Příklad : Vypočtěte velikost úsečky AB, je-li A [4; -2], B [1; 2].

Řešení : $/AB/ = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$/AB/ = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \underline{5\ j}$ (j – jednotek)

Příklad 12 : Vypočtěte velikost úsečky AB :

a) A [2; -1] B [3; 4]
b) A [0; -1] B [3; 3]
c) A [-1; 5] B [-1 ; 4]
d) A [-3; 2] B [6; -2]
e) A [0; 0] B [-2; 1]
f) A [-4; 2] B [2; -4]

Přímka a její směrový a normálový vektor

Přímka je dána body A [x_A ; y_A] a B [x_B ; y_B] . Směrový vektor $\vec{u}$ této přímky je dán :
$\vec{u} = B - A$

Příklad : Přímka p je dána body A a B. A [-4 ; 2] B[3 ; -1]. Vypočtěte směrový vektor přímky p.

Řešení : $u_1 = 3 - (-4) = 7$ $u_2 = -1 - 2 = -3$ $\underline{\vec{u} = (7; -3)}$

(Podívejte se na příklad 1.)

Přímka je dána body A [x_A ; y_A] a B [x_B ; y_B] . Normálový vektor $\vec{v}$ přímky p je kolmý vektor na směrový vektor přímky p.

Příklad : Přímka p je dána body A a B. A [-4 ; 2] B[3 ; -1]. Vypočtěte normálový vektor přímky p.

Řešení : Normálový vektor přímky je kolmý na směrový vektor, který pro přímku p je (7; -3) – viz předcházející příklad
Normálový vektor přímky p je $\vec{v}$ = (3; 7).

Příklad 13 : Vypočtěte směrový a normálový vektor přímky AB, která je určena: a) A [-1 ; 4] , B[2 ; -2],
b) A [3 ; 4] , B[-3 ; 5],
c) A [-3 ; 0] , B[0 ; -2],
d) A [-2 ; -1] , B[2 ; 0],
e) A [0 ; 0] , B[-5 ; -1],

Parametrické vyjádření přímky

Rovnici přímky můžeme určit pomocí libovolného bodu této přímky a směrového vektoru přímky.
Bod A A [x_A; y_A] leží na přímce p, jejíž směrový vektor $\vec{u}$ = (u_1; u_2) . Parametrické vyjádření přímky provedeme :

$x = x_A + t.u_1$
$y = y_A + t.u_2$ $\quad t \in R$ (množina všech reálných čísel)

Příklad : Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází body A [-3; -2] a B [2; 4].
Řešení : směrový vektor přímky AB : $\vec{u}$ = (5; 6)
a) využijeme souřadnice bodu A : $x = -3 + 5.t$
$y = -2 + 6.t$
nebo b) využijeme souřadnice bodu B : $x = 2 + 5.t$
$y = 4 + 6.t$

Příklad 14 : Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází body A a B :
a) A [2; -1] B [3; 4] b) A [0; -1] B [3; 3]
c) A [-1; 5] B [-1 ; 4] d) A [-3; 2] B [6; -2]
e) A [0; 0] B [-2; 1] f) A [-4; 2] B [2; -4]

Neparametrické vyjádření přímky

Příklad : Přímka p je dána body A [-3; -2] a B [2; 4]. Vypočítejte neparametrický tvar rovnice přímky p.
Řešení : obecná rovnice přímky je ax + by + c = 0 , kde a, b, c je libovolné reálné číslo
x, y je dvojice souřadnic všech bodů dané přímky
Přímka prochází bodem A ⇒ -3a -2b + c = 0 (I)
Přímka prochází bodem B ⇒ 2a + 4b + c = 0 (II)
Řešíme jako soustavu rovnic :

upravujeme (I) b = $\frac{c-3a}{2}$

b z (I) dosadíme do (II) a dostaneme a = $\frac{3c}{4}$ (III)

do (II) dosadíme (III) a dostaneme

$$2 \cdot \frac{3c}{4} + 4b + c = 0$$

$$b = -\frac{5}{8}c \qquad (IV)$$

do obecné rovnice ax + by + c = 0 dosadíme (III) a (IV)

$$\frac{3c}{4}x + \left(-\frac{5}{8}c\right)y + c = 0$$

$$6cx - 5cy + 8c = 0$$

$$\underline{6x - 5y + 8 = 0}$$

Příklad 15 : Vypočítejte neparametrický tvar rovnice přímky, která je určena body:
a) A [2 ; 3] B [-3; 4]
b) A [-1 ; 2] B [3; -4]
c) A [5 ; 6] B [6; -1]

Z parametrického vyjádření přímky neparametrické vyjádření přímky

Příklad : Přímka p je určena rovnicemi : x = -3 + 5t y = -2 + 6t. Vypočítejte její neparametrický tvar.
Řešení : z obou rovnic vyjádříme t a dané výrazy dáme do rovnice

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{6}$$

rovnici upravíme $\underline{6x - 5y + 8 = 0}$

Příklad : V minulém příkladě jsme řešili úlohu : „Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází body A [-3; -2] a B [2; 4]“ a měli jsme následující řešení : směrový vektor přímky AB : $\vec{u}$ = (5; 6)

a) využijeme souřadnice bodu A : x = -3 + 5.t
y = -2 + 6.t

nebo b) využijeme souřadnice bodu B : x = 2 + 5.t
y = 4 + 6.t

Dokažte, že řešení bodu a) je adekvátní řešení bodu b).

Řešení : - řešíme bod a) – z obou rovnic vyjádříme hodnotu t

$$t = \frac{x+3}{5} \qquad t = \frac{y+2}{6}$$

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{6}$$

$$6x + 18 = 5y + 10$$

$$\underline{6x - 5y + 8 = 0}$$

- řešíme bod b) – stejným způsobem

$$t = \frac{x-2}{5} \qquad t = \frac{y-4}{6}$$

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{6}$$

$$6x – 12 = 5\,y – 20$$

$$\underline{6x – 5y + 8 = 0}$$

Vidíme, že oba způsoby jsou rovnocenné.

Příklad 16 : Z daného parametrického vyjádření přímky vypočítejte neparametrické vyjádření této přímky :

a) x = 4 + 2t y = 3 + 5t
b) x = -4 + 5t y = 3 + 4t
c) x = -2 – 3t y = -4 – 5t
d) x = 6 – 5t y = -7 + 2t

Rovnice přímky pomocí normálového vektoru

Normálový vektor přímky je kolmý na směrový vektor přímky.
Má-li přímka p směrový vektor →u = (u_1; u_2), pak normálový vektor této přímky →v = (u_2; -u_1).

Příklad : Přímka p je určena body A [-3 ; -2] B [2; 4]. Vypočítejte neparametrický tvar rovnice přímky pomocí normálového vektoru.

Řešení : směrový vektor přímky p →u = (5; 6)
normálový vektor přímky p →v = (6; -5)
dosadíme souřadnice normálového vektoru do obecné rovnice přímky

$$6x – 5y + c = 0$$

bod A leží na přímce p a proto dané rovnice musí platit po dosazení souřadnic bodu A (obdobně platí i pro bod B)

$$6.(-3) – 5.(-2) + c = 0$$

$$c = 8$$

rovnice přímky p $\underline{6x – 5y + 8 = 0}$

Příklad 17 : Pomocí normálového vektoru přímky určete rovnici přímky, která prochází body :

a) A [2 ; 3] B [-3; 4]
b) A [-1 ; 2] B [3; -4]
c) A [5 ; 6] B [6; -1]

Směrnicový tvar rovnice přímky

Obecný tvar přímky : ax + by + c = 0

Z tohoto tvaru vyjádříme hodnotu y $y = -\frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$ nahradíme-li $-\frac{a}{b} = k$

$- \frac{c}{b} = q$

dostaneme směrnicový tvar přímky $y = k.x + q$

Konstanta <u>k</u> vyjadřuje odchylku dané přímky od kladné části osy <u>x</u> souřadného systému.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad (\text{ I })$$

Máme-li libovolný bod K [x; y], který leží na dané přímce, pak musí platit :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_A}{x - x_A} \qquad (\text{ II })$$

Dáme-li řádky do rovnice, dostaneme : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$

Po úpravě dostaneme : $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} . (x - x_A)$ (III)

Příklad : Přímka <u>p</u> je dána body A a B. A [-3 ; -2] B [2; 4]. Vypočtěte rovnici přímky AB pomocí směrnicového tvaru přímky.

Řešení : Vyjdeme ze vztahu (III)

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} . (x - x_A)$$

Do vztahu III dosadíme souřadnice bodů A a B,

$$y + 2 = \frac{4-(-2)}{2-(-3)} . [x - (-3)]$$

$$y + 2 = \frac{6}{5} . (x + 3)$$

$$5y + 10 = 6x + 18$$

$$\underline{6x - 5y + 8 = 0}$$

Poznámka : při stejném zadání, ale jiném způsobu výpočtu jsme dostali stejný výsledek (rovnici přímky).

Příklad 18 : Vypočítejte pomocí vzorce pro směrnicový tvar přímky rovnici přímky AB, která je určena body :

a) A [2 ; 3] B [-3; 4]
b) A [-1 ; 2] B [3; -4]
c) A [5 ; 6] B [6; -1]

Pro výpočet rovnice přímky můžeme použít :

a) parametrické vyjádření přímky
b) neparametrický vyjádření přímky
c) pomocí normálového vektoru přímky
d) pomocí směrnicového tvaru rovnice přímky

Vzájemná poloha bodu a přímky

Je dán bod A [x_A ; y_A] a přímka p určená rovnicí ax + by + c = 0.
Leží-li bod A na přímce p a dosadíme-li jeho souřadnice do rovnice přímky, pak dostaneme rovnost.
Neleží-li bod A na přímce p a dosadíme-li jeho souřadnice do rovnice přímky, pak nedostaneme rovnost.

Příklad : Zjistěte zda body C [1 ; 2,8] a D [5 ; 2] leží na přímce určené rovnicí 6x – 5y + 8 = 0.
Řešení : bod C : 6.1 – 5.2,8 + 8 = 6 -14 + 8 = 0 bod C leží na přímce p
bod D : 6.5 -5.2 + 8 = 30 – 10 + 8 = 28 bod D neleží na přímce p.

Příklad 19 : Určete zda body A a B leží na přímce p určené rovnicí
2x + y - 4 = 0
a) A [-1 ; 4] , B[2 ; 0],
b) A [3 ; 4] , B[-3 ; 10],
c) A [-3 ; 0] , B[0 ; -2],
d) A [-2 ; 8] , B[3 ; -2],
e) A [0 ; 0] , B[-5 ; -1],

Vzdálenost bodu od přímky

Je dán bod A [x_A ; y_A] a přímka p určená rovnicí ax + by + c = 0.
Vzdálenost bodu A od přímky p je dána vztahem :

$$v(A; p) = \frac{|a.x_A + b.y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Příklad : Vypočtěte vzdálenost bodu A [5 ; 2] od přímky určené rovnicí 6x – 5y + 8 = 0.
Řešení : dosadíme do vzorce $v(A; p) = \frac{|a.x_A + b.y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$v(A; p) = \frac{|6.5 - 5.2 + 8|}{\sqrt{6^2 + 5^2}} = \frac{28}{\sqrt{61}} = \frac{28.\sqrt{61}}{61} \text{ (j)}$$

Příklad 20 : Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky určené rovnicí :
a) A [-1 ; 4] , 2x + y - 4 = 0
b) A [3 ; 4] , 6x – 5y + 8 = 0.
c) A [-3 ; 0] , 6x – 5y + 8 = 0.
d) A [-2 ; 8] , 2x + y - 4 = 0
e) A [0 ; 0] , 5x – 2y + 1 = 0

Vzájemná poloha dvou přímek

Je dána přímka p určená rovnicí $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
a přímka q je určena rovnicí $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Jsou-li přímky p a q totožné, pak platí : $a_2 = k.a_1$ $b_2 = k.b_1$ $c = k.c_1$
Jsou-li přímky p a q rovnoběžné, pak platí : $a_2 = k.a_1$ $b_2 = k.b_1$ $c \neq k.c_1$
Jsou-li přímky p a q kolmé, pak platí $a_2 = b_1$ $b_2 = -a_1$

Totožné přímky : $4x – 2y + 3 = 0$ $12x – 6y + 9 = 0$
Rovnoběžné přímky : $4x – 2y + 3 = 0$ $12x – 6y + 11 = 0$
Kolmé přímky : $4x – 2y + 3 = 0$ $-2x – 4y + c_1 = 0$
nebo $2x + 4y + c_2 = 0$, kde c_1 a c_2 je libovolné reálné číslo.
(k libovolné přímce existuje nekonečný počet přímek kolmých)
Má-li tato kolmá přímka procházet konkrétním bodem A $[x_A ; y_A]$, pak musíme vypočítat hodnotu c.

Příklad : Je dána přímka p, která je určena rovnicí $4x – 2y + 3 = 0$. Napište rovnici přímky r, která je na přímku p kolmá a prochází bodem A [3 ; 5].
Řešení : p …………………. $4x – 2y + 3 = 0$
kolmice na p …….. $2x + 4y + c = 0$
do rovnice kolmice dosadíme souřadnice bodu A $2.3 + 4.5 + c = 0$
vyřešíme danou rovnici $c = -26$
r …………………. $\underline{2x + 4y – 26 = 0}$

Příklad 21 : Je dána přímka určená body P a Q. P [5 ; 6] Q [1 ; 10] Napište rovnici přímky r, která je kolmá na přímku PQ a prochází středem úsečky PQ.

Příklad 22 : Je dán trojúhelník ABC. A [6 ; 4] B [-2 ; 2] C [0 ; 8]. Napište souřadnice těžiště.

Příklad 23 : Je dána přímka pomocí bodů A a D. A [10 ; 2] D [8 ; 12] Napište rovnici přímky, která bude rovnoběžná s přímkou AD a bude procházet bodem B [3 ; 1].

Příklad 24 : Určete vzájemnou polohu přímek p a r. Přímka p je určena
$x = 2 + 4t$ $y = 9 – 2t$. Přímka r je určena $x =3 – 8s$ $y = -5 + 4s$. Tento výpočet ověřte pomocí vektorů.

Příklad 25 : Trojúhelník ABC je určen přímkami p .. $5x + 4y -3 = 0$
q .. $3x – 8y + 2 = 0$ r .. $6x + 2y + 5 = 0$. Vypočtěte souřadnice vrcholů trojúhelníka.

Příklad 26 : Přímka je dána bod E [-1 ; 2] F [3 ; -4]. Vypočtěte rovnici přímky EF metodou :
a) parametrického vyjádření
b) neparametrickou cestou
c) pomocí normálového vektoru
d) pomocí směrnicového tvaru

Příklad 27 : Přímka p je určena body A a B. A [2 ; -3] B [1 ; 0] . Určete :
a) parametrický tvar přímky p
b) obecnou rovnici přímky
c) směrnicový tvar přímky
d) normálový vektor přímky
e) směrnicový vektor přímky
f) směrnici přímky
g) směrový úhel přímky
h) leží body C [0 ; 3] D [1 ; 3] na přímce p
i) vzdálenost bodu D od přímky p
j) rovnici kolmice r , která prochází bodem E [2 ; 3]
k) rovnici rovnoběžky s, která prochází bodem E
l) průsečík přímky p s přímkou o určenou rovnicí 5x + 2y + 1 = 0
m) úhel, které svírají přímky p a o.

Příklad 28 : Určete souřadnice průsečíku přímky AB a úsečky CD, platí-li :
A [3 ; 5] B [-1 ; 4] C [2 ; 4] D [6 ; -2]

Příklad 29 : Je dána přímka p určená rovnicí 4x – 2y + 5 = 0. Vypočítejte :
a) rovnici přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem A [3 ; 5]
b) rovnici přímky u, která je kolmá na přímku p a prochází bodem A [-2 ; 3]
c) co můžete říci o přímce s, která je určena rovnicí 12x – 6y + 15 = 0

Příklad 30 : Vypočtěte vzdálenost bodu A [2 ; 1] od přímky určené rovnicí
3x + 4y – 5.

Odchylka dvou přímek v rovině

přímka p …….. $a_1 + b_1 + c_1 = 0$
přímka q …….. $a_2 + b_2 + c_2 = 0$

odchylka přímek α $\qquad$ $\cos\,\alpha = \dfrac{|a_1a_2 + b_bb_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Příklad : Je dána přímka p určená rovnicí 5x – y + 7 = 0 a přímka q určená rovnicí 2x – 3y + 1 = 0. Jaký úhel svírají přímky p a q ?

Řešení : $\cos\,\alpha = \dfrac{|a_1a_2 + b_bb_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

$$\cos\,\alpha = \frac{|5.2 + (-1).(-3)|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}.\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \underline{\alpha = 45^0}$$

Příklad 31 : Je dán trojúhelník ABC A [5 ; 6] B [-2 ; 4] C [6 ; -1]. Napište :

a) parametrické rovnice přímek, na kterých leží strany trojúhelníka
b) obecné rovnice přímek, na kterých leží strany trojúhelníka
c) obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky trojúhelníka
d) souřadnice průsečíku výšek
e) obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice t_a a t_b
f) souřadnice těžiště trojúhelníka
g) velikost výšek
h) velikost vnitřních úhlů trojúhelníka
i) souřadnice pat výšek

9.4. Kružnice

Obecná rovnice kružnice má tvar : $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$,
Kde výraz $m^2 + n^2 - 4p$ je kladný.
Po úpravách dostaneme rovnici na tvar :

$$\left(x + \frac{m}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{n}{2} \right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p$$

kde střed kružnice má souřadnice $S\left[-\frac{m}{2} ; -\frac{n}{2} \right]$

Rovnice kružnice se středem S [x_0 ; y_0] a poloměrem <u>r</u> v kartézské soustavě souřadnic X [x ; y] $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Je-li střed kružnice S v bodě [0 ; 0], pak rovnice má tvar $x^2 + y^2 = r^2$

Rovnice tečny v bodě T [x_0 ; y_0] je-li S [0 ; 0] $x.x_0 + y.y_0 = r^2$
je-li S [x_0 ; y_0] $(x-m).(x_0-m) + (y-n).(y_0-n) = r^2$

Příklad : Je následující rovnice rovnicí kružnice $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 5 = 0$
Řešení : $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$ <u>Ano je kružnicí s poloměrem 5 jednotek.</u>

Příklad 32 : Jsou následující rovnice rovnicí kružnice :
a) $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 5 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 -5x + 4y + 11 = 0$

Příklad 33 : Zjistěte polohu bodu A [-2 ; 1] vzhledem ke kružnici :
a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 5$ c) $x^2 + y^2 -6x - 8y = 0$

Příklad 34 : Určete obecnou rovnici kružnice procházející body A [2 ; 1] B[1 ; 4] C [6 ; 9], její střed a poloměr.

Příklad 35 : Určete rovnici tečny <u>t</u> ke kružnici <u>k</u> určené rovnicí $x^2 + y^2 - 6x + 10y +14 = 0$ v bodě [x_0 ; -3].

Příklad 36 : Určete rovnici tečny t ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě [3 ; 4].

Příklad 37 : Určete rovnici tečny t ke kružnici určené středem v bodě S [1; 2], poloměrem 5 jednotek v bodě [3; 4].

Příklad 38 : Vypočítejte úhel, který svírají těžnice ke kružnici určené rovnicí $x^2 + y^2 = 36$ procházející body T [2 ; y].

Příklad 39 : Určete souřadnice bodu C, který je vrchol rovnostranného trojúhelníka ABC, kde A [1 ; 2] B [7 ; 10].

Souhrnná cvičení :

1) Jsou dány body A [3 ; -4], B [2 ; 1]. Napište :
a) parametrické vyjádření přímky AB
b) obecnou rovnici přímky AB
c) směrnicový tvar přímky AB

2) Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem A [3; -1] a je rovnoběžná : a) s osou x b)s osou y c) s osou I. a III. kvadrantu.

3) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-3 ; 5] a je rovnoběžná s přímkou : a) $5x + 2y – 42 = 0$ b) $x = 3 – 2t$ $y = t$.

4) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-3 ; 5] a svírá s osou úhel 120^0.

5) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [15 ; -3] a průsečíkem přímek určených rovnicemi : $3x – 5y + 12 = 0$ a $5x + 2y – 42 = O$.

6) Napište obecnou rovnici přímky procházející průsečíkem dvojice přímek určených rovnicemi $5x – y + 10 = 0$ a $8x + 4y + 9 = 0$ a kolmou k přímce určenou rovnicí $x + 3y = 0$

7) V rovnici přímky $3x + by – 1 = 0$ určete reálný parametr, b tak, aby :
a) přímka procházela bodem A [2 ; 2]
b) přímka byla rovnoběžná s osou y
c) směrový úhel měl velikost $\frac{\pi}{6}$

8) Určete směrnicový tvar přímky, která prochází body A [1 ; 1] B [-1 ; 5]

9) Zjistěte, zda body A [1 ; 11] a B [3 ; 2] leží na přímce určené bodem C [-5 ; 7] a směrovým vektorem $\vec{u}$ (3; 2).

10) Na přímce $2x + y + 4 = 0$ určete body, které mají od přímky $4x – 3y + 3 = 0$ vzdálenost 5 jednotek.

Výsledky :

1) a) $\vec{u} = (3; -6)$; **b)** $\vec{u} = (-6; 1)$; **c)** $\vec{u} = (3; -2)$; **d)** $\vec{u} = (4; 1)$;
e) $\vec{u} = (-5; -1)$;

2) a) $\sqrt{45}$ j; **b)** $\sqrt{37}$ j; **c)** $\sqrt{13}$ j; **d)** $\sqrt{17}$ j; **e)** $\sqrt{26}$ j; **f)** 5 j;

3) a) -6; **b)** nemá řešení;

4) a) (7; -7); **b)** (-5; -3); **c)** (0; -4); **d)** (0; 0); **e)** (-5; -3); **f)** (3; 4) ;

5) a) (-3; 6); **b)** (6; -1); **c)** (-3; 2); **d)** (-4; -1); **e)** (5; 1); **f)** (0; 2);
g) (-3; -4);

6) a) (-1; -5); **b)** (-7; 5); **c)** (6; 0); **d)** (8; 2); **e)** (-5; 1); **f)** (3; 4);

7) a) (6; -12); **b)** (-24; 4); **c)** (-9; 6); **d)** (-8; -2); **e)** (-30; -6); **f)** (0; 6);
g) (9; 12);

8) a) 18; **b)** -10; **c)** -5; **d)** -17; **e)** -3; **f)** 4;

9) a) $49^0\ 25'$; **b)** $113^0 30'$; **c)** $112^0 40'$; **d)** 180^0; **e)** $107^0 10'$; **f)** $36^0 50'$;
g) 90^0;

10) a) (6; 3); **b)** (-1; -6); **c)** (2; 3) ; **d)** (-1; 4); **e)** (1; -5); **f)** (2; 0); **g)** (-4; 3);

11) a) [2,5; 1,5]; **b)** [1,5;]; **c)** [-1; 4,5]; **d)** [1,5; 0]; **e)** [-1; 0,5] ;
f) [-1; -1];

12) a) $\sqrt{26}$ j.; **b)** $\sqrt{17}$ j.; **c)** 1 j; **d)** $\sqrt{95}$ j.; **e)** $\sqrt{5}$ j.; **f)** $\sqrt{72}$ j.;

13) a) $\vec{u} = (3; -6)$ $\vec{v} = (6; 3)$; **b)** $\vec{u} = (-6; 1)$ $\vec{v} = (-1; 6)$;
c) $\vec{u} = (3; -2)$ $\vec{v} = (2; 3)$; **d)** $\vec{u} = (4; 1)$ $\vec{v} = (-1; 4)$;
e) $\vec{u} = (-5; -1)$ $\vec{v} = (1; -5)$;

14) a) x = 2 + 1t y = -1 + 5t nebo x = 3 + 1t y = 4 + 5t;
b) x = 0 + 3t y = -1 + 4t nebo x = 3 + 3t y = 3 + 4t;
c) x = -1 + 0t y = 5 – 1t nebo x = -1 + 0t y = 4 – 1t;
d) x = -3 + 9t y =2 – 4t nebo x = 6 + 9t y = -2 – 4t;
e) x = 0 – 2t y = 0 + 1t nebo x = -2 – 2t y = 1 + 1t;
f) x = -4 + 6t y = 2 – 6t nebo x = 2 + 6t y = -4 – 6t;

15) a) x + 5y -17 = 0; **b)** 3x + 2y – 1 = 0; **c)** 7x + y – 41 = 0;

16) a) 5x – 2y – 14 = 0; **b)** 4x – 5y + 31 =0; **c)** 5x – 3y – 2 = 0;
d) 2x + 5y + 23 = 0 ;

17) a) x + 5y -17 = 0; **b)** 3x + 2y – 1 = 0; **c)** 7x + y – 41 = 0;

18) a) x + 5y -17 = 0; **b)** 3x + 2y – 1 = 0; **c)** 7x + y – 41 = 0;

19) a) A ne, B ano; **b)** A ne, B ano; **c)** A ne, B ne; **d)** A ano, B ano; **e)** A ne, B ne;

20) a) $-0{,}4.\sqrt{5}$ j ; **b)** $\frac{6.\sqrt{61}}{61}$ j; **c)** $-\frac{10.\sqrt{61}}{61}$ j; **d)** bod leží na přímce; **e)** $\frac{\sqrt{29}}{29}$ j;

21) S [3 ; 8] x – y + 5 = 0;

22) AA_1 x + 7y -34 = 0 BB_1 4x – 5y + 18 = 0 T [$1\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$] ;

23) 5x + y – 16 = 0;

24) p .. x + 2y – 20 = 0 r .. x + 2y + 7 = 0 Jsou rovnoběžné; u (4; -2) v (-8; 4)
vektory rovnoběžné, ale opačně orientované;

25) A [$\frac{4}{13}$; $\frac{19}{52}$] B [-1$\frac{6}{7}$; 3$\frac{1}{14}$] C [-$\frac{22}{27}$; -$\frac{1}{18}$] ;

26) a) $\vec{u}$(4; 6) x = -1 + 4t y = 2 – 6t »3x + 2y – 1 = 0;

b) –a + 2b + c = 0 3a – 4b + c = 0 » a = 2b + c »6b + 3c – 4b + c = 0 » b = - 2c a = -4c + c = -3c » -3cx – 2cy + c = 0 » 3x + 2y – 1 = 0;

c) $\vec{u}$(4; 6) » nor. vektor v(6; 4) » 6x + 4y + C = 0 » 6.(-1) + 4.2 = -c » c = -2 » 6x + 4y – 2 = 0 » 3x + 2y – 1 = 0;

d) $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$ » $\frac{-4-2}{3+1} = \frac{y-2}{x+1}$ » -6x -6 = 4y -8 » 6x + 4y – 2 = 0 » 3x + 2y – 1 = 0;

27) a) u (-1; 3) x = 2 –t y = -3 + 3t ; **b)** 3x + y – 3 = 0 ; **c)** y = -3x + 3 ;
d) (3 ; 1) ; **e)** (-1; 3) ; **f)** -3; **g)** tg α = - 3 $\alpha = 71^0\,34'$ $\alpha = 108^0\,26'$;
h) C ano, D ne; **i)** v = $\frac{|3.1+3.1-3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3.\sqrt{10}}{10}$; **j)** –x + 3y – 7 = 0 nebo x – 3x + 7 = 0; **k)** 3x + y -9 = 0; **l)** [7 ; -18] ; m) cos $\alpha = \frac{17}{\sqrt{10}.\sqrt{29}}$ $\alpha = 3^0\,21'$;

28) AB … x - 4y + 17 = 0 CD …. 3x + 2y – 14 = 0 průnik přímek ..
X [1$\frac{4}{7}$; 4$\frac{9}{14}$] , je mimo úsečku CD;

29) a) 4x – 2y – 2 = 0; **b)** 2x + 4y – 8 = 0 ; **c)** p je totožná s s;

30) 1 jednotka;

31) a) BC … x = -2 + 8t_1 y = 4 – 5t_1 **b)** 5x + 8y – 22 = 0
AC ... x = 5 + t_2 y = 6 – 7t_2 7x + y – 41 = 0
AB … x = 5 – 7t_3 y = 6 – 2t_3 2x – 7y + 32 = 0
c) v_a … 8x – 5y – 10 = 0 v_b … x – 7y + 30 = 0 v_c … 7x + 2y – 40 = 0
d) T [4$\frac{5}{17}$; 4$\frac{15}{17}$] ; **e)** A_1 [2 ; 1,5] t_t … 3x – 2y – 3 = 0 B_1 [5,5 ; 2,5] t_b … x + 5y – 18 = 0; **f)** T [3 ; 3] ; **g)** $v_a = \frac{51.\sqrt{89}}{89}$ j; $v_b = \frac{51.\sqrt{50}}{50}$ j ; $v_c = \frac{51.\sqrt{53}}{53}$ j; **h)** $\alpha = 82^0\,11'$ $\beta = 47^0\,57'$ $\chi = 49^0\,52'$;
i) A_0 [2$\frac{12}{89}$; 1$\frac{37}{89}$] B_0 [5,14; 5,02] C_0 [4$\frac{4}{53}$; 5$\frac{39}{53}$] ;

32) a) ano, protože $(x – 6)^2 + (y – 3)^2 = 50$; **b)** ne, protože r = 0 $(x – 4)^2 + (y –2)^2 = 0$; **c)** ne, protože r musí být kladné $(x –2{,}5)^2 + (y + 2)^2 = - 0{,}75$;

33) a) 4 + 1 -25 < 0 bod leží uvnitř kružnice;
b) 4 + 1 – 5 = 0 bod leží na kružnici;
c) 4 + 1 + 12 – 8 = 9 > 0 bod leží vně kružnice;

34) $x^2 + y^2 + mx + nx + p = 0$
4 + 1 + 2m + n + p = 0 1 + 16 + m + 4n + p = 0
36 + 81 + 6m + 9n + p = 0 » a = -12 b = -8 c = 27 »
$x^2 + y^2 – 12x – 8y + 27 = 0$ » $(x – 6)^2 + (y – 4)^2 = 25$ S [6 ; 4] r = 5 j;

35) k … $(x – 3)^2 + (y + 5)^2 = 20$ » $(x_0 -3)^2 + 4 = 20$ $x_{01} = 7$ $x_{02} = -1$

[7 ; -3], [-1 ; -3] » $(x + 3).(x_0 + 3) + (y + 5).(y_0 + 5) = 20$ »
t_1 … $5x + y + 10 = 0$ $t_2 = x + y – 2 = 0$

36) $x.x_0 + y.y_0 = r^2$ » $3x + 4y – 25 = 0$;

37) $(x – 1). (3 – 1) + (y – 2) . (4 – 2) = 25$ » t … $2x + 2y – 31 = 0$;

38) $2^2 + y^2 = 36$ » $y_1 = +\sqrt{32}$ $y_2 = -\sqrt{32}$ » t_1 … $2x + \sqrt{32}y – 36 = 0$

$t_2 = 2x - \sqrt{32}y – 36 = 0$ » $\cos\alpha = \dfrac{\left|2.2-\sqrt{32}.\sqrt{32}\right|}{\sqrt{4+32}.\sqrt{4+32}} = \dfrac{28}{36} = \dfrac{7}{9}$ » $\alpha = 39^0$

39) /AB/ = 10 jednotek » $100 = (x_C – 1)^2 + (y_c – 2)^2$
$100 = (x_C – 7)^2 + (y_C – 10)^2$ »
substituce $a = x_c – 1$ $b = y_C – 2$ » $100 = a^2 + b^2$
$100 = (a – 6)^2 + (b – 8)^2$

» $a = \sqrt{100-b^2}$ kde b je v intervalu < -10 ; 10 > »

$100 = 100 – b^2 – 12.\sqrt{100-b^2} + 36 + b^2 – 16b + 64$

$b^2 – 8b – 11 = 0$ » $b_1 = 9,2$ » $a_1 = + 3,9$ $a_2 = - 3,9$
$b_2 = – 1,2$ » $a_3 = 9,92$ $a_4 = - 9,92$ »

dozujeme do substituce :
možnosti bodů C : [4,9 ; 11,2]; [-2,9 ; 11,2]; [10,92 ; 0,8]; [8,92 ; 0,8].
Protože $x_x < 7$ » v úvahu přichází [4,9 ; 11,2]; [-2,9 ; 11,2];
C_1 [4 ; 6] přímka AB …$4x – 3y + 2 = 0$ » přímka CC_1 ….$3x + 4y – 36 = 0$ »
Dosazením dvou možností do této rovnice » řešením je bod [-2,9 ; 11,2];

Souhrnná cvičení :

1) a) $\vec{u}$ (-1; 5) $x = 3 – t$ $y = -4 + 5t$; **b)** $5x + y – 11 = 0$; **c)** y = -5x + 1+;

2) a) $\vec{u}$(1; 0) $x = 3 + t$ $y = -1$; **b)** $\vec{u}$(0; 1) $x = 3$ $y = -1 + t$;
c) $\vec{u}$(1; 1) $x = 3 + t$ $y = -1 + t$;

3) a) $5x + 2y + c = 0$ » $-15 + 10 = -c$ » $5x + 2y + 5 = 0$;
b) $\vec{u}$(-2; 1) $x + 2y + c = 0$ $-3 +10 = -c$ $x – 2y -7 = 0$;

4) $y = kx + q$ $k = \text{tg}\,\alpha$ » $\text{tg}\,120^0 = -\sqrt{3}$ » $y = -\sqrt{3}.x + q$ » $5 = -\sqrt{3}.(-3) + q$ »
$y = -\sqrt{3}.x + 5 +3.\sqrt{3}$;

5) Průsečík přímek je P [6 ; 6] $\vec{u}$ = PA $\vec{u}$ = (9; -9) » $9x + 9y + c = 0$ »
$c = - 108$ $9x + 9y -108 = 0$ $x + y – 12 = 0$

6) Průsečík přímek A [-1,75 ; 1,25] » kolmice $-3x + y + c = 0$ » -3.(-1,75) +
+ 1,25 + c = 0 » c = - 6,5 » $6x – 2y + 13 = 0$

7) a) $6 + 2b – 1 = 0$ » $b = - 2,5$;
b) směrový vektor např. $\vec{u}$(0; 1) » přímka $x + c = 0$ » $b = 0$;
c) $\dfrac{\pi}{6}$ ….. 30^0 $\text{tg}\,30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $3x + by - 1 = 0$ » $y = \dfrac{-3}{b}.x + \dfrac{1}{b}$ »

$\text{tg}\,30^0 = \dfrac{-3}{b}$ » $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{-3}{b}$ » $b = -3.\sqrt{3}$;

8) $y = kx + q$ » $1 = k.1 + q$ $5 = (-1).k + q$ » $q = 3$ $k = -2$ » $y = -2x + 3$

9) p …. $x = -5 + 3t$ $y = 7 + 2t$ » C : $1 = -5 + 3t$ $t = 2$ $11 = 7 + 2t$ $t = 2$ ano;
D : $t = \dfrac{8}{3}$ $t = -2,5$ ne;

10) $2x + y + 4 = 0$ » $y = -2x – 4$ » souřadnice bodů [x ; -2x - 4] dosadíme do v (A; p) = $\frac{|a.x_A + b.y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 5 = $\frac{|4x - 3.(-2x - 4) + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$ »

5 = $\frac{|10x + 15|}{5}$ » 25 = $|10x + 15|$ » 10x + 15 > 0 25 = 10x + 15 » x = 1

10x + 15 < 0 25 = -10x – 15 » x = -4

pro x = 1 y = -2x – 4 » y = -6

pro x = -4 y = -2x – 4 » y = 4 » [1 ; -6] a [-4 ; 4]